Al-Mamoun University Collage

Laser and Optoelectronics Engineering Department

First Stage

Mathematics II

جميع المحاضرات

Ahmed Hashim

2023-2024

CamScanner

The MATRIX

Difinition The Matrix is a rectangular figure contain computation element (numbers, variables, functions,--) always is surrond by two bracket and The general form to the matrix of order mxn

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

← i-row

↑ j-Column

حسب المفهوم العام المصفوفة عبارة عن عناصر مرتبة على شكل صفوف واعمدة ويرمز لها بالرمز ( ) او [ ]

فاذا كانت تحتوي على m صف و n عمود نقول انه المصفوفة من الرتبة mxn

على سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

مصفوفة تحتوي على 3 صفوف و 2 عمود

اذا من الرتبة نعرف كم صف وكم عمود

Exam:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

The matrix A of order 3x4

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

The matrix B of order 3x3

$$C=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

C of order 4x1

$D=[-1 \quad 3 \quad 4 \quad 6]$ The matrix D of order 1x4

MATRIX TYPES

1 - Square Matrix

its matrix of order nxn [The rows = The columns]

المصفوفة المربعة عندما تتساوى عدد الصفوف مع عدد الاعمدة نقول انها مربعة

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

2- Diagonal Matrix
is square matrix That is all element out The main diagonal is equal to zero $a_{ij}=0 \quad \forall i \neq j$
المصفوفة القطرية هي التي عناصرها كلها اصفار ماعدا القطر وهذه تكون في المصفوفات المربعة [القطر الرئيسي]

$$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&5\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ممكن يكون العدد العناصر بالقطر = 0 المهم باقي القطر اصفار

3- Identity (unit) Matrix "I_n"
its diagonal matrix that is all element in The main diagonal equal to one and is denoted by "I_n"
مصفوفة الوحده هي مصفوفة قطرية لكن عناصر القطر تساوي واحد فقط ويرمز لها بـ I_n

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad I_1=[1]$$

4- Zero Matrix "0" (Null Matrix)
its matrix that is all element equal to zero and is denoted by $0_{n\times n}$
المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة كل عناصرها اصفار

$$0_{3\times 4}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

5- Symmetric Matrix
is square matrix that is all element out The main diagonal are symmetric The main diagonal $A=A^T$
المصفوفة المتناظرة هي مصفوفة مربعة كل العناصر حول القطر الرئيسي تكون متناظرة وفيها يكون المصفوفة تساوي مدورها $A=A^T$ وكما سنشرح الدور في المرة القادمة

$$A=\begin{bmatrix}4&2&7\\2&5&8\\7&8&6\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}4&2&7\\2&5&8\\7&8&6\end{bmatrix}$$

الصف يصبح عمود والعمود يصبح صف

المصفوفة = مدورها

$$A=A^T$$

6- Transpore of Matrix

The nxm matrix is obtained from a mxn matrix A by interchanging rows and coloumns, is called The transpore of A

المصفوفة المحورة هي المصفوفة التي الصف يصبح فيها عمود والعمود يصبح صف

ويرمز لها بالرمز A^T

a) $A=\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix} \rightarrow A^T=\begin{bmatrix}2 & 8\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix} \rightarrow B^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{bmatrix}$

نلاحظ

$A_{mxn} \Rightarrow A^T_{nxm}$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow C^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 4\\1 & -1\end{bmatrix} \rightarrow D^T=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 4 & -1\end{bmatrix}$

ملاحظة

في المصفوفة الملاحظة نلاحظ

$$A=A^T$$

7- Upper Traingular Matrix

its square matrix that its all elements under The main diagonal is zero; $a_{ij}=0 \ , \forall i>j$

المصفوفة المثلثية العليا هي مصفوفة مربعة تكون اسفل عناصر القطر الرئيسي اصفار

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\0 & 3 & -1\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

8- Lower Traingular Matrix

its square matrix that is all elements above The main diagonal is zeve

المصفوفة المثلثية السفلى هي مصفوفة مربعة تكون اعلى عناصر القطر الرئيسي اصفار

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\4 & 2 & 0\\5 & 7 & 3\end{bmatrix}$$

ملاحظة

في المصفوفة المقابلة ممكن احد عناصر القطر تكون 0 المهم ماكلهم اصفار

وكذلك بالمثلثة العليا والسفلى ممكن تكون بالقطر صفر او اكثر وكذلك ممكن يبقى الاعداد تكون صفر المهم ماكلهم

Equal Matrix

Two matrixes $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ are equal if they have the same size $(m\times n)$ and $a_{ij}=b_{ij}$

يقال لمصفوفتين انهما متساويتين اذا كان لهما نفس الرتبة $(m\times n)$ وكذلك العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوي

Ex:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}_{2\times 1}$

$A\neq B$ المصفوفتان A, B غير متساويتان لان نفس الرتبة

2) $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 9\\ 7 & 8 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 9\\ 7 & 8 & 3\end{bmatrix}$

$A=B$ لانه نفس الرتبة ونفس الاعداد وترتيبها بالصفوف (اي المتناظره متساويه)

ممكن يعطينا بالسؤال انه المصفوفتين متساويتين ويطلب منا ايجاد قيم مجاهيل فيهم وكالتالي

i) if $A=B$

$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ find a, b

الحل

$\because \begin{pmatrix}1 & a\\ b & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Longrightarrow a=3$, $b=2$

2) Find a, b in The following

$$\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b & 2\\ 3 & a+b\end{bmatrix}$$

بما انه المصفوفتان متساويتان ∴ العناصر المتناظرة متساوية

الحل

$a-b=2$ —①

$a+b=4$ —②

$2a=6 \Longrightarrow a=\frac{6}{2}=3$

نعوض عن قيمة a باحدى المعادلتين بس

$3+b=4 \Longrightarrow b=4-3 \Longrightarrow b=1$

Matrix algebra:

1- Matrix Addition - Subtraction جمع وطرح المصفوفات

if $A=[a_{ij}]$ and $B=[b_{ij}]$ are matrices of size $m \times n$

Then Their sum is The $m \times n$ matrix given by

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$$

اول ملاحظة (متى نجمع المصفوفتين A, B
لا يمكن جمعهم الا اذا كانو من نفس الرتبة $m \times n$ ويكون الناتج
مصفوفة من الرتبة $m \times n$ كذلك
والطريقة هي جمع العناصر المتناظرة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

ملاحظة الطرح نفس الفكرة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

اذا لم يكونوا من نفس الرتبة نقول الناتج غير معرف لا يمكن الجمع والطرح

2- Multiplication Matrix by constant

if A is a matrix of order $m \times n$, k is constant then:

$$kA=[ka_{ij}]_{m \times n}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad k=4 \; ; \quad 4A=\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 12 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

في المصفوفة يمكن انه نضرب ثابت في مصفوفة لكن
بالحدود لا يصح هذا كما سوف نتابع

3- Multiplication of Matrics

if A is a matrix of order $m \times n$ and B is a matrix of order $n \times p$

Then The multiplication of the matrix A & B is denoted by C of order $m \times p$

تكون المصفوفة A قابلة للضرب في المصفوفة B

اذا كانت عدد اعمدة المصفوفة A تساوي عدد صفوف المصفوفة B

اي اذا كانت المصفوفة A من الرتبة $(m \times n)$ والمصفوفة B من الرتبة (n, w) فان

حاصل ضرب AB تكون من الرتبة $(m \times p) \cdot (p, w) \Rightarrow m, w$

مثال حول ضرب المصفوفات

اول خطوة نتبعه لها هل انه اعمدة المصفوفة الاولى تساوي صفوف المصفوفة الثانية تلاحظ الرتبة

$A_{(2\times3)}$ & $B_{(3\times4)} \Rightarrow AB_{2\times4}$

الناتج

- اذاً من الرتبة نعين هل نستطيع انه نضرب المصفوفات ولكن لازم نستطيع انه نعرف رتبة ناتج الضرب امثلة

$A\ B\ C \Rightarrow (3\times2)(2\times1)(1\times3) = (3\times3)$ المصفوفة الناتجة من الرتبة

$AC \Rightarrow (2\times1)(1\times3) \Rightarrow (2,3)$

$CA \Rightarrow (1\times3)(2,1) =$ undefined لا يمكن ايجاد ناتج الضرب [اعمدة المصفوفة الاولى ≠ صفوف المصفوفة الثانية]

EXAM.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 4\\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times3} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 5 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}_{3\times2}$$

Find The multiplication

1-

تلاحظ عدد اعمدة A = عدد صفوف B ولهذا نستطيع الضرب الضرب وتكون المصفوفة الناتجة من الرتبة $(2\times3)(3\times2)$ (2×2)

ضرب صف × عمود

$$A.B=\begin{bmatrix}5\times4+2\times5+4\times3 & 5\times2+2\times1+4\times2\\ 6\times4+3\times5+1\times3 & 6\times2+3\times1+1\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20+10+12 & 10+2+8\\ 24+15+3 & 12+3+2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}42 & 20\\ 42 & 17\end{bmatrix}$$

[صف اول × عمود اول | صف اول × عمود ثاني]
[صف ثاني × عمود اول | صف ثاني × عمود ثاني]

ملاحظات عامة

١- حاصل جمع اي مصفوفتين من نفس الحجم اي نفس الرتبة يكون الجمع ابدالي

$$A+B=B+A$$

٢- حاصل الجمع لاي مصفوفتين مختلفة الحجم (اي الرتبة غير متساوية) في هذه الحالة يكون الناتج غير معروف (undefined)

٣- في المصفوفات يمكن ان نضرب المصفوفة بعدد مياسي (ثابت) ويكون الناتج من نفس الرتبة

وهذه الخاصية لا تنطبق على المحددات

٤- عند ضرب مصفوفتين يجب ان يكون اعمدة المصفوفة الاولى = صفوف المصفوفة الثانية

والناتج يكون الحل غير معروف

٥- اذا كانت A, B مصفوفة فان

$$A.B \neq BA$$

واذا كان $AB=BA$ نقول ان المصفوفتان A, B متبادلتان (commutative matrix)

٦- اذا كانت $A=-A^T$ وكانت A مصفوفة مربعة فتسمى عكسية (الزاوية) skew-symmetric matrix

٧- حاصل ضرب اي مصفوفة A في محور المصفوفة A^T يكون الناتج identity

$$A.A^T = A^T.A = I$$

٨- محور حاصل ضرب مصفوفة

$$(AB)^T = B^T A^T$$ لا تنسى الترتيب يختلف

٩- تطلق على المصفوفة nilpotent matrix عندما $A^P=0$ حيث ان $P \in N$ اي مثلا

$$A^2 = A.A = 0$$

HOME WORK

1) Find $A+B$ if

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2) if

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$ Find ① $A+B$ ② $A-B$

3) Find a,b if $A=B$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a+b \\ a-b & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4) Find AB

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, B=I_{2\times 2}$, $I_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

e) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

5) if

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ Show That

$$A=-A^T$$

THE DETERMINANTS المحددات

DEF: For all square matrix, there exist infinite no. is called the determinants of the matrix

كل مصفوفة مربعة يوجد لها قيمة عددية

محدد المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ يرمز له بالرمز $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

1) The det. of 2nd order: من الرتبة (2x2)

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

حاصل ضرب القطر الرئيس − حاصل ضرب القطر الثانوي

EXAM

- $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(2)-1(-3) = 4+3 = 7$
- $|B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2)-4(1) = 4-4 = 0$

ملاحظة: اذا كانت قيمة المحدد صفر $|B|=0$ هذا يعني امرين حيث انه نضعهم في فكرنا

1- اذا كانت $|B|=0$ هذا يعني لايوجد معكوس للمصفوفة B

2- عند حل المعادلات وكان قيمة المحدد = 0 يعني المعادلات ليس لها حل

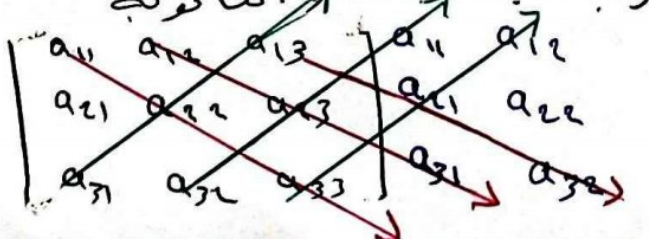
2) the dete. of 3rd order

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

في المحددة من الرتبة 3x3 هناك طريقتين للحل والطالب له الحرية باستعمال الطريقة المناسبة له

(a) تكرار العمودين الاول والثاني حيث نقول/ حاصل ضرب اسهم الاقطار الرئيسية مطروح منه مجموع حاصل ضرب اسهم الاقطار الثانوية

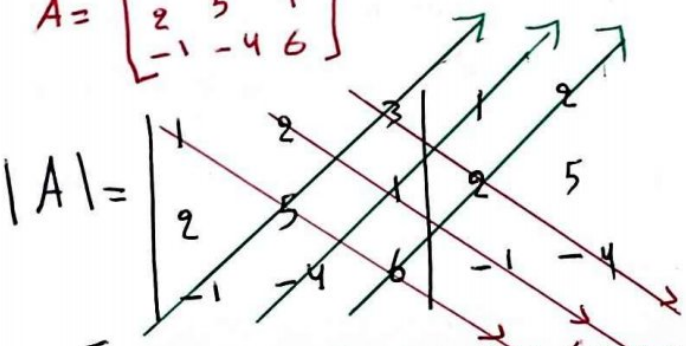
وكما في المثال



EXAM (1)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & -4 & 6\end{bmatrix}$$

$|A|=$



$$=[(1\times5\times6)+(2\times1\times-1)+(3\times2\times-4)]-[(-1\times5\times3)+(-4\times1\times1)+(6\times2\times2)]$$

$$=[30-2-24]-[-15-4+24]$$

$$=4-5=-1$$

$\therefore |A|=-1$

b) طريقة حذف صف وعمود ونوضحها بالمثال

(b) EXAM (1)

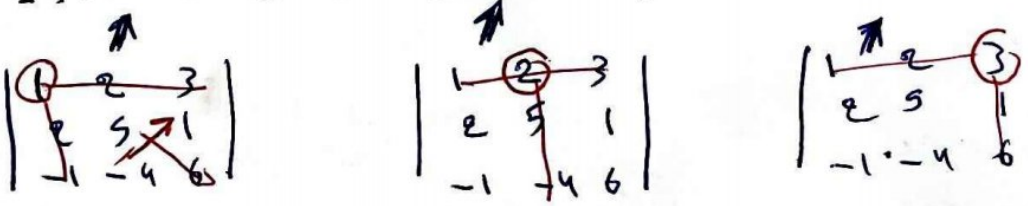
Find The determinats $|A|$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & -4 & 6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{bmatrix}$$

- أول شيء نتعلم قاعدة الاستارات وهي
- ناخد اول عدد 1 نحذف الصف والعمود الذين يمرون به ونضع المضروب من الرقم 2
- نستمر مع الاتجاه الى قاعدة الاستارات (ناخد صف)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & -4 & 6\end{vmatrix}$$

$$=+1[30-(-4)]-2[12-(-1)]+3[-8-(-5)]$$



$$=+34-2(13)+3(-3)$$

$$=34-26-9$$

$$=34-35=-1$$

نفس الناتج بالطريقة السابقة

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

لازم تبدأ بقاعدة الاشارات

EXAM(2) Find $|A|$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ناخذ صف واحد

$$|A|=\begin{vmatrix} +0 & -2 & +1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0[-1-0]-2[3-8]+1[0-(-4)]$$

$$= 0-2(-5)+1(4) = -(-10)+4$$

$$= +10+4 = 14$$

Determinants properties

خواص المحددات

1

① if elements of row or column equal to zero Then $det(A)=0$

اذا كان احد الصفوف او الاعمدة كلها صفر
فان قيمة المحدد = 0

EXAM

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |B|=0$$

② اذا تساوى صفين او عمودين (او) كان احد الصفوف ضعف الاخر
او احد الاعمدة ضعف الاخر
فان قيمة المحدد = 0

EXAM

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A|=0 \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow |B|=0$$

(3) For any upper or lower triangular matrix the value of det. is equal to multiplying the elements of main diagonal

اذا كانت المصفوفة مثلثية عليا او سفلى فان ناتج المحدد = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1\times 4\times 2 = 8$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 1\times 2\times 1 = 2$$

(4) if we instead two rows or two columns then the sign of det A is change and the value number stay constant

اذا بدلنا صفين احدهما مكان الاخر يكون نفس الناتج وبعكس الاشارة

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix} = -9$$

$$|B| = \begin{vmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix} = +9$$

CamScanner

كيف نجد مدور المرافقات adj(A)

١- اذا كانت المصفوفة مربعة ومن الرتبة 2×2 يكون التقرير مباشر وذلك بتغيير مكان عناصر القطر الرئيسي احدهما بمكان الاخر اما القطر الثانوي يغير اشارته فقط ونوجد مدور المرافقات بالرمز $adj(A)$

مثال

Ex ① $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

② $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

٢- اذا كانت المصفوفة مربعة ومن الرتبة 3×3 نجد بالبداية صافي المصفوفة $\overline{A}$ ثم نجد مدور $\overline{A}$ وبذلك نحصل على $adj(A)$

كيف نجد مصفوفة المرافقات $\overline{A}$

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

١- نستخدم قاعدة الاشارات

٢- نحذف صف وعمود

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

CamScanner

EXAM

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{A}$ مصفوفة المرافقات في المصفوفة المربعة (3X3)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} (3+16) & -(2+12) & (8-9) \\ -(1-4) & (1-3) & -(4-3) \\ (-4-3) & -(-4-2) & (3-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -14 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 19 & -14 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -7 & 6 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{(مصفوفة المرافقات)}$$

ثم نجد المدور (Transpose)

$$(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 19 & 3 & -7 \\ -14 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

CamScanner

The Inverse Matrix By using Cofactor

DEF. if A is square matrix. B is matrix with same order and satisfied the relation:

$A.B = B.A = I$ such That I is The identity matrix, Then we said The matrix B is The inverse of The matrix A and denoted by A^{-1}

كيفية ايجاد معكوس المصفوفة

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ اي مصفوفة X معكوسها = I

اذا كان المحدد = 0 فان المصفوفة ليس لها معكوس (غير معرف)

معكوس المصفوفة ماينوجد الا اذا كانت المصفوفة مربعة

١- نجد قيمة المحدد للمصفوفة $|A|$ ٢- نجد المرافق $\bar{A}$

٣- نجد مدور المرافقات للمصفوفة $(\bar{A})^T = adj(A)$

٤- نطبق القانون

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

EXAM Find invers matrix of

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1- $|A| = (2)(2) - (1)(3) = 4 - 3 = 1$

2- $adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3- $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ملاحظة: اذا اردنا ان نتأكد فنداتي الجواب النهائي لحيث انه يكون

$$A.A^{-1} = I$$

اي

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

EXAM : Find invers matrix of

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$|A| = +1[(0)(2)-(0)(1)] - (-1)[(3)(2)-(1)(1)] + (2)[3(0)-1(0)]$

$= 0+5+0 = 5$

باختيار الصف الثاني (1) $\Rightarrow +1[(-1)(2)-(0)(2)] - 0 + 2[(1)(0)-(3)(1)] = -1+2(3)$

$= -1+6$

$= 5$

$\therefore |A| = 5 \neq 0$

نشف الدستار -

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 5 & 3\end{bmatrix} \Longrightarrow (\bar{A})^T = \begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -5 & 0 & 5\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix} = adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -5 & 0 & 5\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}}{5} = \begin{bmatrix}0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

ملاحظة

اذا اعطانا مصفوفة واردنا ايجاد المحدد لها نختار الصف او العمود الذي كله اصفار حتى تسهل العملية مثل امثلتنا السابقة وحينها قيمة المحدد بطريقتين

ونتبه عندما تكون الصفوف قليلة في هذه الحالة يكون قيمة المحدد [حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي]

1- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2- $(AB)B^{-1}A^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = AA^{-1} = I$

I is identity matrix

HOMEWORK

1- if $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Find $|A|$, $\bar{A}$, $(\bar{A})^{T} = adj(A)$, A^{-1}

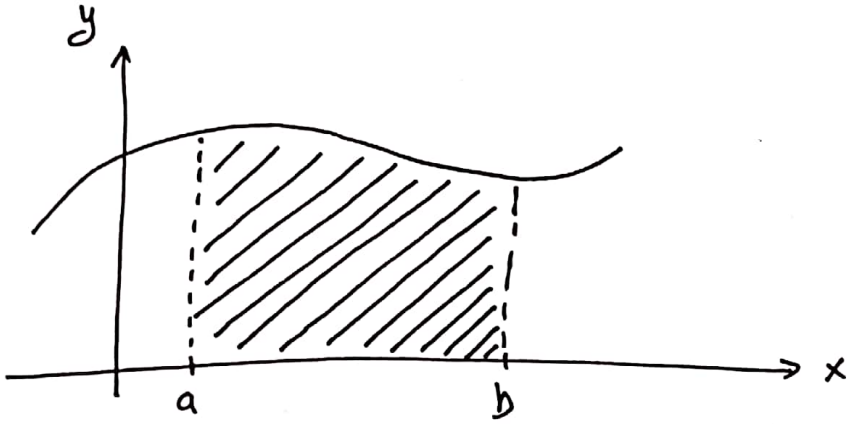
2- Find A^{-1}, B^{-1} if $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

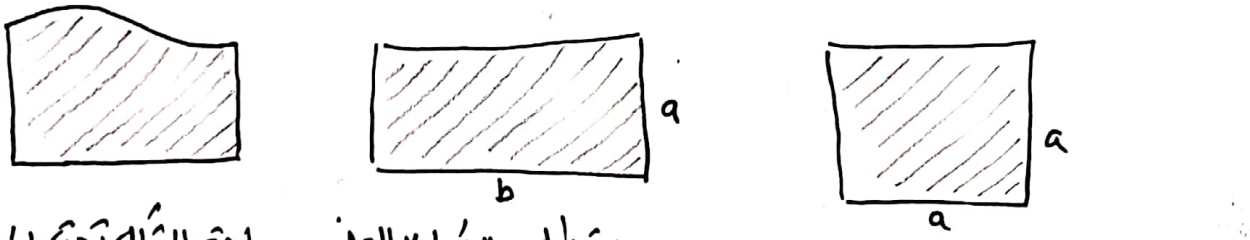
CamScanner

Concept of Integral مفهوم التكامل

الغاية والفكرة الرئيسية من التكامل هي ايجاد مساحة لشكل معين، على سبيل المثال،



في حال أردنا ايجاد المساحة المحصورة تحت المنحنى بين النقطتين (a,b)، نلاحظ أن الشكل تحت المنحنى "مبهم"، أي انه لا يشبه أي من الاشكال الرياضية المعروفة،

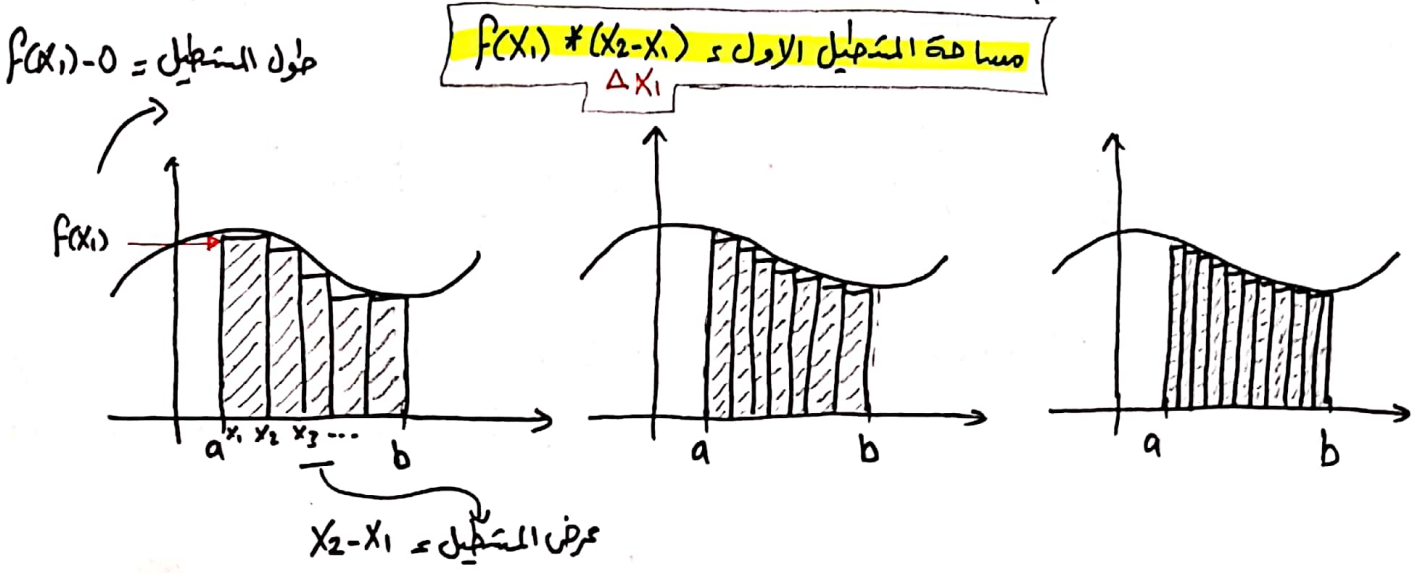


مساحة الشكل تحت المنحنى (؟)

مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

لذلك نكن البعض في تقسيم هذا الشكل المبهم الى احد الاشكال المعروفة، وليكن عدد من المستطيلات،



بناءً على الشكل والقوانين السابقة، نستطيع إيجاد مساحة أي مستطيل تحت المنحنى من خلال القانون التالي،

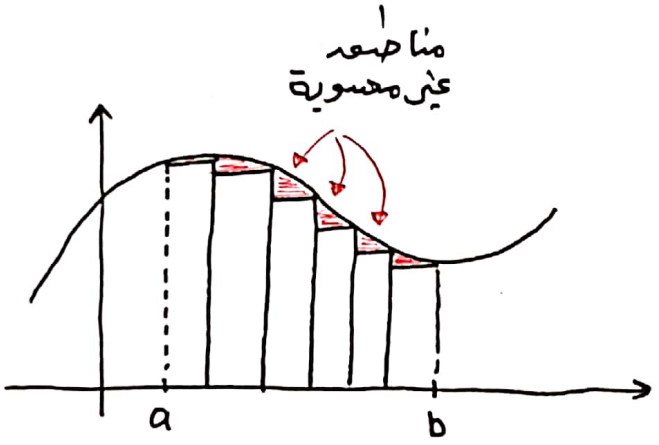
مساحة المستطيل الأول = $f(X_1)\ \Delta X_1$

مساحة المستطيل الثاني = $f(X_2)\ \Delta X_2$

كما نستطيع إيجاد المساحة الكلية تحت المنحنى (مساحة جميع المستطيلات) من خلال،

$$\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\ \Delta X_i = f(X_1)\ \Delta X_1 + f(X_2)\ \Delta X_2 + \cdots + f(X_n)\ \Delta X_n$$

بهذا الشكل وجدنا مساحة جميع المستطيلات لكننا فقدنا العديد من النقاط الواقعة بين قمة المستطيل والمنحنى، كما يبين الشكل التالي،



نلاحظ ان زيادة عدد المستطيلات يقلل من عدد المناطق غير المحسوبة وبالتالي يزيد من الدقة، لذلك فإن فكرة التكامل تتلخص بإنشاء عدد لانهائي من المستطيلات تحت المنحنى لتكون الدقة في اعلى قيمها، وليكون القانون بالشكل التالي،

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\ \Delta X_i = \int_a^b f(x)\ dx$$

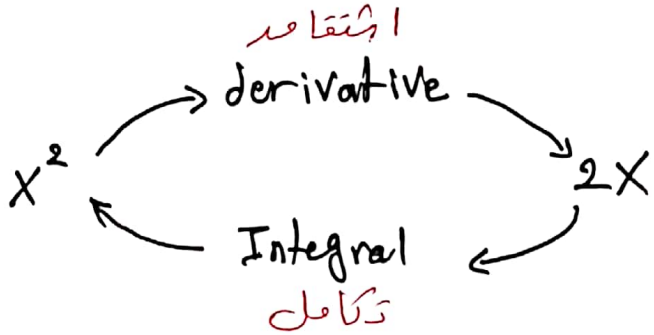
* تكامل محدد

في حال قمنا بتعويض أي دالة في القانون اعلاه لفترة معينة من الزمن، سوف نستطيع إيجاد المساحة تحت المنحنى بكل دقة!

التكامل في الرياضيات هي عملية عكس عملية الإشتقاق ، أي ان التكامل يقوم بأخذ الجزء المشتق ويُعيد الدالة الاصلية قبل الإشتقاق ، تسمى هذه العملية "عملية عكس الاشتقاق" او "Antiderivative" .

EX① $y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$

عملية التكامل هي عملية إعادة $(2x)$ الى شكلها الاصلي قبل الإشتقاق (x^2) .



تكامل غير محدد

بالشكل التالي ،

$$\int 2x\,dx = \frac{2x^{1+1}}{1+1} = \frac{2x^2}{2} = x^2 + C$$

↳ Constant of Integral

بشكل عام ، يمكننا تلخيص عملية الإشتقاق والتكامل بالقوانين التالية ،

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n\,x^{n-1}$$

$$\int [x^n]\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

CamScanner

EX ②

$$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$\int 3x^2\,dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} = \frac{3x^3}{3} = x^3 + C$$

$$\frac{d}{dx}[x^3 + C] = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$$

• Basic Rules of Integration القواعد الاساسية للتكامل

① الثابت

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

EX ③ $$\int 8x^3\,dx = 8\int x^3\,dx = \frac{8x^{3+1}}{3+1} + C$$

$$= \frac{8x^4}{4} + C = 2x^4 + C$$

EX ④ $$\int 4\,dx = 4\int dx = 4x + C$$

EX ⑤ $$\int 4x^0\,dx = 4\int x^0\,dx = \frac{4x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$= \frac{4x^1}{1} + C = 4x + C$$

EX ⑥ $$\int -7\,dz = -7\int dz = -7z + C$$

CamScanner

② توزيع التكامل

$$\int (f(x) \mp g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx$$

③ تكامل الأسس

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

EX ⑦ $$\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$$

EX ⑧ $$\int x^8\,dx = \frac{x^{8+1}}{8+1} + C = \frac{x^9}{9} + C$$

EX ⑨ $$\int x^{-8}\,dx = \frac{x^{-8+1}}{-8+1} + C = \frac{x^{-7}}{-7} + C$$

④ تكامل المكسور

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$$

EX ⑩ $$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

EX ⑪ $$\int \frac{x}{4}\,dx = \int \frac{1}{4} \cdot x\,dx = \frac{1}{4}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{8}x^2 + C$$

CamScanner

⑤ تكامل الجذور

$$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$$

EX ⑫ $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

EX ⑬ $$\int \sqrt[3]{x^4}\,dx = \int x^{\frac{4}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + C$$

EX ⑭ $$\int \left(\frac{3}{\sqrt[4]{x^5}} + 2x^{-2}\right) dx$$

$$= \int \frac{3}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx + \int 2x^{-2}\,dx$$ ① قاعدة التوزيع

$$= 3\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx + 2\int x^{-2}\,dx$$ ② قاعدة الثابت

$$= 3\int x^{-\frac{5}{4}}\,dx + 2\int x^{-2}\,dx$$

CamScanner

$$= 3\frac{x^{-\frac{5}{4}+1}}{-\frac{5}{4}+1} + 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= 3\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + 2\frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-12}{x^{\frac{1}{4}}} - \frac{2}{x} + C \quad = \frac{-12}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{x} + C$$

⑤ تكامل الدالة بوجود مشتقتها وفي غيابها

$$\int (f(x))^n f'(x)\, dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

EX ⑮ $\int (x^2+3)^3 (2x)\, dx$

$$= \frac{(x^2+3)^{3+1}}{3+1} + C \quad = \frac{(x^2+3)^4}{4} + C$$

EX ⑯ $\int (2x^2+1)(3x-5)\, dx$

$$= \int 6x^3 - 10x^2 + 3x - 5 \, dx$$

$$= 6\int x^3 dx - 10\int x^2 dx + 3\int x\, dx - 5\int dx$$

$$= \frac{6x^{3+1}}{3+1} - \frac{10x^{2+1}}{2+1} + \frac{3x^{1+1}}{1+1} - 5x + C$$

$$= \frac{6x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + C$$

CamScanner

EX (17) $\int (x^2+2x)^9 (x+1)\, dx$

$$= \int (x^2+2x)^9 \frac{(2x+2)}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+2x)^9 (2x+2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x)^{9+1}}{9+1} + C \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x)^{10}}{10} + C$$

EX (18) $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\, dx$

$$= \int (4x+6)(2x+3)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int 2(2x+3)^1 (2x+3)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int 2(2x+3)^{1+\frac{1}{2}} dx \Rightarrow \int 2(2x+3)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= 2\int (2x+3)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= \frac{(2x+3)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{2}} + C$$

CamScanner

⑦ إذا كانت مشتقة المقام متوفرة في البسط

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

EX ⑲ $$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \ln|x^2+x| + C$$

⑧ إذا كان الأساس ثابت والأس متغير

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C$$

EX ⑳ $$\int e^x\,dx = \frac{e^x}{\ln|e|} + C = e^x + C$$

* هذا الأمر يؤكد مرة أخرى أن مشتقة الدالة الأسية هي نفسها .

* ما معنى C التي تختفي في نهاية التكامل ؟

نكتب C لأن احتمال في المشتقة كان هناك متغير ، كما بين الأمثلة التالية ،

$$\frac{d}{dx}\,x^2+5 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\,x^2 = 2x$$

نلاحظ أن وجود او غياب الرقم لم يؤثر على نتيجة المشتقة ، لذلك يتم وضع c تحسباً لوجود شيء - متغير - في الدالة قبل الإشتقاق .

حالات خاصة

① $\int x^0 \, dx = \int 1 \, dx = x + C$

② $\int x^{-1} \, dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{x^0}{0} + C =$ Undefined!

الطريقة الصحيحة لحل تكامل x^{-1} هو بالشكل التالي،

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx$$

وفي هذه الحالة نعود لتكاملات القاعدة رقم 8 (إذا كانت مشتقة المقام موجودة في البسط)،

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

HOMEWORK

① $\int x^1 \, dx$

② $\int x^4 \, dx$

③ $\int 5 \, dy$

④ $\int \frac{x}{6} \, dx$

⑤ $\int \sqrt[4]{x^7} \, dx$

CamScanner

Definite Integration التكامل المحدد (ديفينيت)

الفرق الرئيسي بين التكامل المحدد وغير المحدد أن التكامل غير المحدد يكون الناتج الخاص به عبارة عن دالة بالنسبة لـ X او Y او غيرها، كما درسنا في الدروس السابقة، وكما بين المثال التالي،

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

بينما في التكامل المحدد يكون الناتج عبارة عن رقم، كما بين المثال التالي،

$$\int_a^b f(x)\,dx = 25$$

(a: lower limit, b: upper limit, 25: ناتج المثال)

يعرف قانون التكامل المحدد على التالي،

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- أي ان ناتج التكامل المحدد هو عبارة عن ناتج تعويض الحد الاعلى للتكامل في الدالة ناقص ناتج تعويض الحد الادنى للتكامل في الدالة.

CamScanner

EX ① $\int_2^5 8\,dx = 8x\Big|_2^5$

$= [8(5)] - [8(2)]$

$= 40 - 16 = 24$

EX ② $\int_1^4 [5x-4]\,dx = \frac{5x^2}{2} - 4x + C \Big|_1^4$

$= \left[\frac{5(4)^2}{2} - 4(4) + C\right] - \left[\frac{5(1)^2}{2} - 4(1) + C\right]$

$= 40 - 16 + \cancel{C} - \frac{5}{2} + 4 - \cancel{C}$

$= 24 + 4 - \frac{5}{2} = 28 - \frac{5}{2} = \frac{56}{2} - \frac{5}{2}$

$= \frac{51}{2} = 25.5$

EX ③ $\int_{-3}^4 \frac{8}{x^3}\,dx = \int_{-3}^4 8x^{-3}\,dx = 8\int_{-3}^4 x^{-3}\,dx$

$= \frac{8x^{-2}}{-2}\Big|_{-3}^4 = \frac{4x^{-2}}{-1}\Big|_{-3}^4 = \frac{-4}{x^2}\Big|_{-3}^4$

$= \left[\frac{-4}{(4)^2}\right] - \left[\frac{-4}{(-3)^2}\right] = \frac{-1}{4} + \frac{4}{9}$ *

$= \frac{-1(9)}{4(9)} + \frac{4(4)}{9(4)} = \frac{-9}{36} + \frac{16}{36}$

$= \frac{7}{36}$

* يجب توحيد المقامات لذلك يجب ايجاد اقل عدد يقبل القسمة على 9 و 4 وهو 36

EX ④ $\int_1^e \frac{5}{x}\,dx = 5\int_1^e \frac{1}{x} = 5\ln(x)\Big|_1^e$

$= [5\ln(e)] - [5\ln(1)]$ ($\ln(e)=1$, $\ln(1)=0$)

$= 5(1) - 5(0) = 5 - 0 = 5$

EX ⑤ $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_4^9 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9$

$= [2(9)^{\frac{1}{2}}] - [2(4)^{\frac{1}{2}}]$

$= [2\sqrt{9}] - [2\sqrt{4}]$

$= 2(3) - 2(2) = 6 - 4 = 2$

EX ⑥ $\int_1^2 [3x^2 - 5x^1 + 2] = \frac{3x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x\Big|_1^2$

$= \left[(2)^3 - \frac{5(2)^2}{2} + 2(2)\right] - \left[(1)^3 - \frac{5(1)^2}{2} + 2(1)\right]$

$= [8 - 10 + 4] - [1 - \frac{5}{2} + 2]$

$= 2 - 1 + \frac{5}{2} - 2 = -1 + \frac{5}{2}$

$= \frac{-2}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

CamScanner

EX ⑦ $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \int_4^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_4^9$

$= \left[\frac{2(9)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] - \left[\frac{2(4)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]$

$= \left[\frac{2(27)}{3}\right] - \left[\frac{2(8)}{3}\right]$

$= \frac{54}{3} - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}$

* $9^{\frac{3}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^3 = (3)^3 = 27$

* $4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = (2)^3 = 8$

EX ⑧ $\int_0^1 x^2[x^3+5]^2\,dx$

$\int_0^1 x^2(x^3+5)(x^3+5)\,dx$

$\int_0^1 x^2(x^6+5x^3+5x^3+25)\,dx$

$\int_0^1 x^2(x^6+10x^3+25)\,dx$

$= \int_0^1 x^8+10x^5+25x^2\,dx$

$= \left.\frac{x^9}{9} + \frac{10x^6}{6} + \frac{25x^3}{3}\right|_0^1$

$= \left[\frac{(1)^9}{9} + \frac{10(1)^6}{6} + \frac{25(1)^3}{3}\right] - \left[\frac{(0)^9}{9} + \frac{10(0)^6}{6} + \frac{25(0)^3}{3}\right]$

$= \frac{2}{18} + \frac{30}{18} + \frac{150}{18} = \frac{182}{18} = \frac{91}{9}$

CamScanner

HOMEWORK

(1) $\int_2^3 \frac{x^3 - 5x^2}{x} \, dx$

(2) $\int_2^3 [8x^3 + 3x^2 + 6x] \, dx$

(3) $\int_1^4 \frac{8}{\sqrt{t}} - 12\sqrt{t^3} \, dt$

(4) $\int_2^1 \frac{2y^3 - 6y^2}{y^2} \, dy$

CamScanner

Integral of Trigonometric function تكامل الدوال المثلثية

Before we start with the integration of trigonometric functions, We should first review the differention of trigonometric functions,

① $f(x) = \sin(x) \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$

② $f(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$

③ $f(x) = \tan(x) \longrightarrow f'(x) = \sec^2(x)$

④ $f(x) = \cot(x) \longrightarrow f'(x) = -\csc^2(x)$

⑤ $f(x) = \sec(x) \longrightarrow f'(x) = \sec(x)\tan(x)$

⑥ $f(x) = \csc(x) \longrightarrow f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$

---

① $\int \sin(x)\,dx \longrightarrow -\cos(x) + C$

② $\int \cos(x)\,dx \longrightarrow \sin(x) + C$

③ $\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$= \frac{1}{-1}\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$= -1 \ln|\cos(x)| + C$

$= -\ln|\cos(x)| + C$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

CamScanner

(4) $\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$

$= \ln|\sin(x)| + C$

(5) $\int \sec(x)\,dx$

$\int \sec(x) \cdot \frac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx$

$\int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx$

$f(x)=\sec(x) \rightarrow f'(x)=\sec(x)\tan(x)$

$f(x)=\tan(x) \rightarrow f'(x)=\sec^2(x)$

$\int \frac{\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx$

$= \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C$

(6) $\int \csc(x)\,dx$

$\int \csc(x) \frac{\csc(x)+\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)}\,dx$

$\int \frac{\csc(x)\cot(x)+\csc^2(x)}{\csc(x)+\cot(x)}\,dx$

$f(x)=\csc(x) \rightarrow f'(x)=-\csc(x).\cot(x)$

$f(x)=\cot(x) \rightarrow f'(x)=-\csc^2(x)$

$-1\int \frac{-\csc(x)\cot(x)-\csc^2(x)}{\csc(x)+\cot(x)}\,dx$

$= -\ln|\csc(x)+\cot(x)| + C$

CamScanner

EX ① $\int \cos(2x)\,dx$

$$= \frac{2}{2}\int \cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

EX ② $\int \tan(5x)\,dx$

$$= \frac{5}{5}\int \tan(5x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\int 5\tan(5x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|\cos(5x)| + C$$

∵ $\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C$

EX ③ $\int \sec(7x)\,dx$

$$= \frac{7}{7}\int \sec(7x)\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\int 7\sec(7x)\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\ln|\sec(7x) + \tan(7x)| + C$$

∵ $\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$

ملاحظة مهمة:

$$\underbrace{\cos^5(x)}_{\checkmark} = \underbrace{(\cos(x))^5}_{\checkmark} \neq \underbrace{\cos(5x)}_{\times}$$

Some trigonometric function relationship

① $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ n: odd

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ n: odd

② $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ n: even

③ $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ n: even

Integral of Powers of trigonometric function

$$\int \sin^n(x)\,dx \quad , \quad \int \cos^n(x)\,dx$$

EX ④ $\int \sin^3(x)\,dx$

$= \int \sin(x)\,\sin^2(x)\,dx$

$= \int \sin(x)\,(1 - \cos^2(x))\,dx$

$= \int (\sin(x) - \sin(x)\cos^2(x))\,dx$

$= -\cos(x) - \sin(x)(\cos(x))^2$

$= -\cos(x) + \frac{(\cos(x))^3}{3} + C$

CamScanner

EX ⑤ $\int \cos^5(x)\, dx$

$= \int \cos(x)\, \cos^4(x)\, dx$

$= \int \cos(x)\, (\cos^2(x))^2\, dx$ * عند الرفع نضرب الاوس

$= \int \cos(x)\, (1 - \sin^2(x))^2\, dx$ * مربع الاول ± 2 × الاول × التالي + مربع العدد التالي

$= \int \cos(x)\, (1 - 2\sin^2(x) + \sin^4(x))\, dx$

$= \int \cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) + \cos(x)\sin^4(x)\, dx$

$= \sin(x) - 2\frac{(\sin(x))^3}{3} + \frac{(\sin(x))^5}{5} + C$

$= \sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x) + \frac{1}{5}\sin^5(x) + C$

EX ⑥ $\int \sin^2(x)\, dx$

$= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2}\, dx$

$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + C$

$= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$

CamScanner

Ex (7) $\int \cos^4(x)\,dx$

$= \int (\cos^2(x))^2\,dx$

$= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$

$= \int \frac{1}{4}(1+\cos(2x))^2\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x))\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{4}\left(x + \sin(2x) + \frac{1}{2}x + \frac{\sin(4x)}{8}\right) + C$

$= \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C$

CamScanner

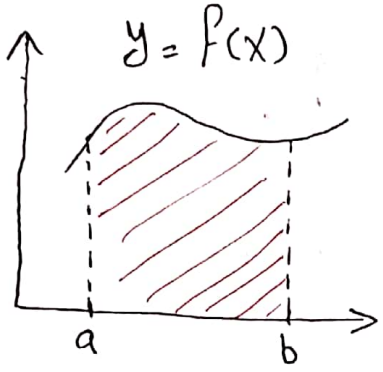
HOMEWORK

(1) $\int \cos^4(2t)\, dt$

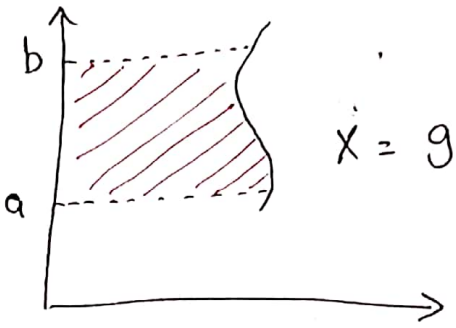
(2) $\int (\sin^2(x)\ \cos^2(x))\, dx$

CamScanner

Area Under the Curve المساحة تحت المنحنى



$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx$$

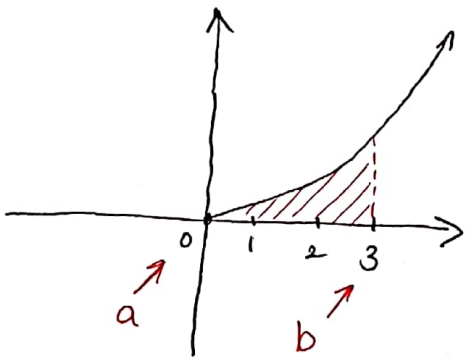


$$\text{Area} = \int_a^b g(y)\,dy$$

EX ① Find the area of the region bounded by the curve $y = x^2$ from $x = 0$ to $x = 3$.

الخطوة الاولى للحل هو رسم شكل الدالة من خلال تعويض القيم في المعادلة واستخراج النقاط

x	$y = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9
⋮	⋮



$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx$$

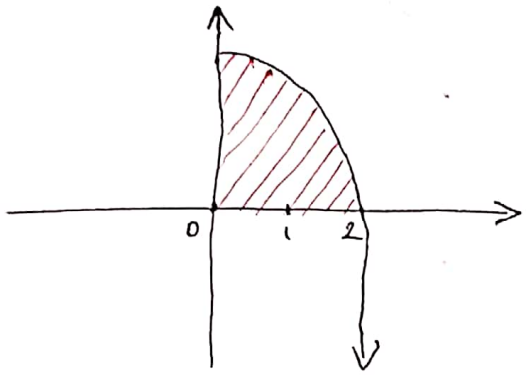
$$A = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$= \frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{27}{3} - 0 = \boxed{9}$$

CamScanner

EX ② Find the area of the region bounded by the curve $y = 4 - x^2$ from $x = 0$ to $x = 2$.

x	$y = 4 - x^2$
0	$4 - 0 = 4$
1	$4 - 1 = 3$
2	$4 - 4 = 0$
3	$4 - 9 = -5$
⋮	⋮



$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$A = \int_0^2 4 - x^2\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$= \left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[4(0) - \frac{(0)^3}{3}\right]$$

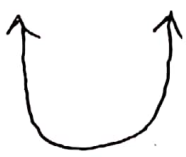
$$= \left[8 - \frac{8}{3}\right] - [0]$$

$$= \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

ملاحظة /

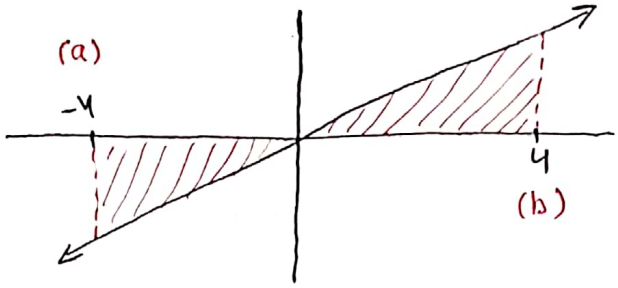
إذا كانت المعادلة تحتوي على $(-x^2)$ فإن الشكل العام يكون كالتالي ،

بينما يكون بالشكل التالي عندما (x^2) ،



CamScanner

Ex ③ Find the area of the region bounded by the line $y = x$ from $x = -4$ to $x = 4$.



إن تم حل هذا السؤال بالطريقة العادية المتعارف عليها في الأمثلة السابقة فإن الناتج سيكون (صفر)، وهو أمر غير منطقي، كما يبين الحل التالي،

$$A = \int_{-4}^{4} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-4}^{4}$$

$$= \frac{(4)^2}{2} - \frac{(-4)^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{16}{2} = 8 - 8 = \boxed{0}$$

- لذلك يجب أن يتم حل السؤال بطريقة مغايرة. نلاحظ أن المساحة تحت المنحنى في الاتجاه الموجب مساوية تماماً للمساحة في الاتجاه السالب، لذلك يمكننا حساب المساحة في اتجاه واحد وضرب الناتج في (2) لإيجاد المساحة بالكامل،

$$A = 2 \int_{0}^{4} x \, dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{4} = x^2 \Big|_{0}^{4}$$

$$= (4)^2 - (0)^2 = \boxed{16}$$

$$A = \frac{1}{2} b h$$
$$= \frac{1}{2}(4)(4)$$
$$= 8$$

المساحة الكلية للمثلثين في الاتجاه الموجب والسالب، هي 16، وبما أنهما بنفس الحجم يمكننا استنتاج أن حجم كل مثلث هو 8، كما يمكننا إثبات ذلك - رياضياً - كالآتي،

في حال لم يكن الرسم (المنحنى) متماثل بين الاتجاه الموجب والسالب، يكون القانون كالآتي،

$$A = \int_0^4 x\,dx - \int_{-4}^{0} x\,dx$$

نلاحظ أن تكامل المنحنى الذي يقع أعلى المحور x يكون ذو إشارة موجبة (+) بينما يكون تكامل المنحنى الذي يقع أسفل المحور x ذو إشارة سالبة (−).

EX (4) Find the area of the region bounded by the curve $y = -x^2 + 6x - 8$ and the x-axis.

نلاحظ ان السؤال لم يعطنا التقاطع التي يتقاطع فيها المنحنى مع المحور x، يمكننا إيجاد التقاطع من خلال المعادلة المعطاة بالشكل التالي،

$$y = -x^2 + 6x - 8$$

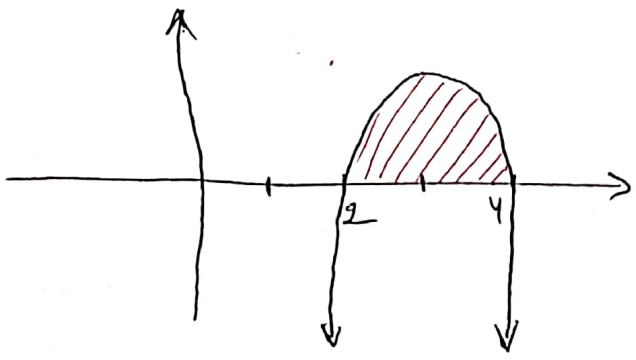
$$0 = -1(x^2 - 6x + 8) \longrightarrow$$

* يجب أن نجد عددين حاصل ضربهم (8) وحاصل جمعهم 6-

$$0 = -1(x-2)(x-4)$$

$$x = 2 \qquad x = 4$$

ستكون نقاط تقاطع المنحنى المحدد بالمعادلة مع المحور x هي 2 و 4، لذلك يكون شكل المنحنى كالآتي،



$$A = \int_2^4 [-x^2 + 6x - 8]\, dx$$

$$= \frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x \Big|_2^4$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \Big|_2^4$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(4)^3 + 3(4)^2 - 8(4)\right] - \left[-\frac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 - 8(2)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(64) + 48 - 32\right] - \left[-\frac{8}{3} + 12 - 16\right]$$

$$= -\frac{61}{3} + 16 + \frac{8}{3} + 4 = -\frac{56}{3} + 20$$

$$= \frac{-56}{3} + \frac{60}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

EX ⑤ Find the area of the region bounded by the curve $\boxed{y = 3x - x^2}$ from $x = -2$ to $x = 3$.

نرسم الاولا في زياد النقاط التي يتقاطع فيها المنحنى الموضح من المعادلة مع المحور الأفقي،

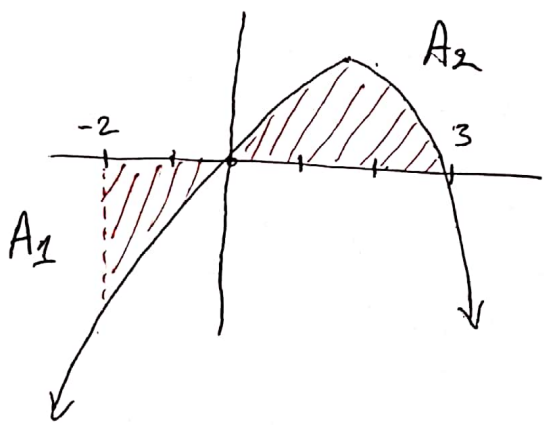
$$y = 3x - x^2$$

$$0 = x(3 - x)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\boxed{x = 0} \qquad 3 - x = 0$$

$$\boxed{3 = x}$$



CamScanner

نلاحظ اننا نملك جانبين للحل في هذا السؤال ، على المحور الموجب و السالب ، لكن لا يمكننا حل هذا المثال مثل المثال ③ لأن الجانبين التي سنحسبهما ، لذلك يجب أن نتقدم تكاملين في هذه الحالة ، نطلعه على المساحة تحت المنحنى في الجانب السالب A_1 ، والمساحة في الجانب الموجب A_2 ليكون قانون المساحة كالآتي ،

$$\boxed{A_T = |A_2| + |A_1|}$$

$$A_T = A_2 - A_1$$

$$= \int_0^3 [3X - X^2]\,dx - \int_{-2}^0 [3X - X^2]\,dX$$

$$= \frac{3X^2}{2} - \frac{X^3}{3}\Big|_0^3 - \left[\frac{3X^2}{2} - \frac{X^3}{3}\right]\Big|_{-2}^0$$

$$= \left[\left(\frac{3(3)^2}{2} - \frac{(3)^3}{3}\right) - \left(\frac{3(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{3}\right)\right] -$$

$$\left[\left(\frac{3(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{3}\right) - \left(\frac{3(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{27}{2} - 9\right] - \left[-\left(6 + \frac{8}{3}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{27}{2} - 9\right] + 6 + \frac{8}{3}$$

$$= -3 + \frac{27}{2} + \frac{8}{3} = \frac{-18}{6} + \frac{81}{6} + \frac{16}{6} = \frac{81}{6} - \frac{2}{6}$$

$$\boxed{A_T = \frac{79}{6}}$$

CamScanner

Integration by Parts — التكامل بالتجزئة

التكامل بالتجزئة هو طريقة حل التكاملات التي تتكون الدالة فيها من حاصل ضرب دالتين ، كما يوضح المثال التالي ،

$$\int f(x)\, g(x)\, dx \quad \cdots (1)$$

لحل الأسئلة التي يكون فيها السؤال بالشكل أعلاه ، نستخدم قانون التكامل بالتجزئة ،

$$\int u\, dv = u.v - \int v.du \quad \cdots (2)$$

لكي نعرف أصل هذا القانون يجب أن نعود الى المشتقات ، تحديداً عندما نحاول إيجاد حاصل اشتقاق حاصل ضرب دالتين ، كنا نقول : (مشتقة الدالة الاولى × الدالة الثانية ثابتة) + (مشتقة الدالة الثانية × الدالة الاولى ثابتة) ، بالشكل التالي ،

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}(f(x).g(x))\right] = \int [f(x).g'(x) + g(x).f'(x)]$$

نرتب

$$f(x).g(x) = \int f(x).g'(x)\,dx + \int g(x).f'(x)\,dx$$

$$f(x).g(x) - \int g(x).f'(x)\,dx = \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int g(x).f'(x)\,dx \quad \cdots (3)$$

CamScanner

نلاحظ ان القانون ② مشابه للقانون ③ مع الافتراضات التالية ،

$$u = f(x) \quad , \quad v = g(x) \quad , \quad du = f'(x) , \quad dv = g'(x)$$

يمكننا الآن كتابة القانونين ليتسنى لنا مقارنة الشبه بينهما ،

① $$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)\, dx$$

② $$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

EX ① Evaluate $\int x \cdot \cos(x)\, dx$

نلاحظ اننا نتعامل مع دالتين ، احداها ليست مشتقة الثانية ، لذلك نتقدم التكامل بالتجزئة بالشكل التالي ،

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

بين $\cos(x)$ و x ، من هي الدالة التي يتم اعتبارها u ومن هي dv ؟ الدالة التي يكون لـ تفاضلها ابسط هي الدالة التي تجتزى (u) عادة ، لأننا سنقوم باشتقاق لـ لنحصل على (du) ، لذلك في هذا السؤال نفرض التالي ،

$u = x \implies du = dx$ (اشتقاق)

$dv = \cos(x)\, dx \implies v = \sin(x)$ (تكامل)

الآن نقوم بتعويض المتغيرات اعلاه في القانون ،

$$\int x \cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$

$$= x\sin(x) - (-\cos(x)) + C$$

$$= \boxed{x\sin(x) + \cos(x) + C}$$

EX ② Evaluate $\int x \cdot e^x\,dx$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$u = x \Rightarrow du = dx$ (اشتقاق)

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ (تكامل)

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx$$

$$= \boxed{x e^x - e^x + C}$$

EX ③ $\int e^x \cos(x)\,dx$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$dv = \cos(x)\,dx \Rightarrow v = \sin(x)$

CamScanner

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) - \underbrace{\int e^x \sin(x)\,dx}_{\text{يحتاج تكامل بالتجزئة}}$$

$$\int e^x \sin(x)\,dx$$

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$$

$$dv = \sin(x)\,dx \Rightarrow v = -\cos(x)$$

$$\int e^x \sin(x)\,dx = -e^x \cos(x) - \left(\int -e^x \cos(x)\,dx\right)$$

$$\int e^x \sin(x)\,dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx$$

نعيد الناتج الى المعادلة الاصلية

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) - \left(-e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx\right)$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx + \int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \boxed{\frac{e^x \sin(x)}{2} + \frac{e^x \cos(x)}{2} + C}$$

CamScanner

EX ④ $\int x^2 \ln x \, dx$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}$

$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C}$$

EX ⑤ $\int \ln x \, dx$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$v = x$

$dv = dx$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$$\int \ln x \, dx = (\ln x)(x) - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= \boxed{x \ln x - x + C}$$

CamScanner

EX ⑥ $\int x^2 e^x \, dx$

$u = x^2$
$du = 2x \, dx$
$v = e^x$
$dv = e^x \, dx$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int e^x (2x) \, dx$$

يحتاج تكامل بالتجزئة

$$\int e^x 2x \, dx$$

$u = 2x \Rightarrow du = 2 \, dx$
$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\int e^x 2x \, dx = 2x e^x - \int 2 e^x \, dx$$

نعيد النتائج الى المعادلة الاصلية

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - [2x e^x - \int 2 e^x \, dx]$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x \, dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C$$

$$= e^x [x^2 - 2x + 2] + C$$

CamScanner

HOMEWORK

(1) $\int x \sin x \, dx$

(2) $\int x^2 \sin(x)$

CamScanner

Integration by Substitution التكامل بالتعويض

في دراستي المحاضرات السابقة، في حال واجهنا سؤال لتكامل دالة (قوس) مرفوع لأس معين، يجب توفير مشتقة داخل القوس لكي نتمكن من حل السؤال، على سبيل المثال،

$$\int (x-9)^7 (x+1)\, dx$$

نلاحظ أننا لا نستطيع التخلص من القوسين - على الرغم من اننا يمكننا اعتبار توفر 1 في المعادلة والتخلص من احد القوسين - ، كما اننا لا يمكننا فتح القوس ذو الأس 7 سبعة مرات، قد يكون الامر ممكناً رياضياً لكنه مرهق للغاية، لذلك نحتاج الى التكامل بالتعويض.

EX ① $\int (x-9)^7 (x+1)\, dx$

lets assume,

$x-9 = u$

$x = u+9$

$x+1 = u+9+1$

$x+1 = u+10$

$dx = du$

$$\int u^7 (u+10)\, du = \int (u^8 + 10u^7)\, du$$

$$= \frac{u^9}{9} + \frac{10u^8}{8} + C = \boxed{\frac{(x-9)^9}{9} + \frac{10(x-9)^8}{8} + C}$$

CamScanner

EX ② $\int x\sqrt{x-5}\,dx$

$\int x\,(x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$

lets assume,

$X-5=u$ → $X=u+5$, $dx=du$

$$\int (u+5)(u)^{\frac{1}{2}}\,du = \int (u^{\frac{3}{2}}+5u^{\frac{1}{2}})\,du$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{5u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{10u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \boxed{\frac{2(X-5)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{10(X-5)^{\frac{3}{2}}}{3} + C}$$

ملاحظة: درسنا سابقاً إحدى حالات التكامل وهي حالة الدالة في المقام ومشتقة الدالة موجودة في البسط، فلنتذكر هذه الحالة،

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

EX $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + C$

CamScanner

Ex ③ $\int \frac{x}{\sqrt{1+4x}}\,dx$

$$\int \frac{x}{(1+4x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x\,(1+4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

lets assume,

$1+4x = u$

$x = \frac{u-1}{4}$

$4\,dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{4}$

$$\int \frac{u-1}{4}\,u^{-\frac{1}{2}}\,\frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{16}\int (u-1)\,u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{16}\int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}})\,du$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{2(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{1}\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{2}{16}\left(\frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{1}\right) + C}$$

CamScanner