الفصل الأول
دوال متعددة المتغيرات

مقدمة: افرض أن شركة ما تنتج نوع واحد من انتاج معين، تربح 2000 دينار عن كل وحدة مباعة. فإذا مثلت x عدد الوحدات المباعة فإن الربح الكلي $P(x)$ بالدنانير هو $P(x) = 2000x$. حيث أن $P(x)$ تشير الى دالة لمتغير واحد هو x. أما إذا فرض بان احدى الشركات تنتج نوعين من الانتاج هما منتوج A ومنتوج B وأنها تربح 3000 دينار عن كل وحدة مباعة من منتوج A ، 2000 دينار من كل وحدة مباعة من المنتوج B ، وإذا كانت x تمثل عدد الوحدات المباعة من A و y تمثل عدد الوحدات المباعة من B فإن الربح الكلي لهذه الشركة بالدينار سيكون $P(x,y) = 3000x + 2000y$ ، فعلى سبيل المثال لو تم بيع وحدتين من منتوج A ووحدة واحدة من منتوج B فإن $P(2,1)$ يمثل الربح وفي هذه الحالة $P(2,1) = 3000(2) + 2000(1) = 8000$ وكذلك أن $P(1,2)$ تشير الى الربح لبيع وحدة واحدة من A و 2 من B وفي هذه الحالة فأن $P(1,2) = 7000$.

الدالة المعرفة اعلاه $P(x,y)$ تدعى بالدالة للمتغيرين x و y . وكامثلة على مثل هذا النوع من الدوال هي:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy \quad , \quad g(x,y) = e^x(x+y)$$

حيث x و y تمثل المتغيرات المستقلة و f تمثل المتغير المعتمد. كما وتوجد دوال اخرى لأكثر من متغيرين وكأمثلة على دوال لثلاثة متغيرات هي: $f(x,y,z) = 5xyz \quad , \quad g(x,y,z) = 7e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

ويمكن بشكل مماثل تعميم هذه الحالة لتعريف دوال بعدة متغيرات. وفيما يلي بعض الأمثلة :

<u>مثال1:</u> لتكن لدينا دالة للمتغيرين x و y حيث: $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$

فأن الدالة f تأخذ قيمة واحدة لكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية. فمثلاً $f(3,1) = 3^2 + 1^2 - 1 = 9$ ، $f(1,3) = 1^2 + 3^2 - 3 = 7$ ، $f\left(4,\frac{1}{2}\right) = 4^2 + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 16 - \frac{1}{4} = 15\frac{3}{4}$
وبذلك فإن منطلق الدالة f ستكون من ازواج مرتبة من الاعداد الحقيقية .

<u>مثال2:</u> لتكن لدينا دالة لمتغيرين x و y حيث $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

فإن الدالة f تأخذ قيمة واحدة لكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية ، بشرط أن يكون $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ أي $x^2 + y^2 \leq 1$ فمثلاً $f(0,0) = 1$ ، $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ومنطلق هذه الدالة مكون من جميع الازواج المرتبة للأعداد الحقيقية بحيث أن $x^2 + y^2 \leq 1$.

<u>مثال3:</u> (واجب) نفرض أن $f(x,y) = xy + 5y - x^2$

أحسب $f(-2,5)$, $f(0,1)$, $f(2,-3)$.

<u>مثال4:</u> لتكن لدينا دالة للمتغيرين x و y على الشكل التالي : $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

الدالة f تأخذ قيمة واحدة حقيقية لكل زوج مرتب (x,y) من الأعداد الحقيقية بحيث أن $x \neq y$.

<u>مثال5:</u> لتكن لدينا الدالة التالية ولثلاث متغيرات $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + z^2$. منطلق الدالة f هو مجموعة جميع الأرقام المرتبة من ثلاثة اعداد حقيقية (x,y,z) وعليه كلما زادت عدد المتغيرات كان من الصعب تصوير مخطط للدالة المدروسة .

<u>مثال6 (تطبيقي):</u> أفرض أن احدى الشركات الصناعية في فترة زمنية معينة تنتج منتوج معين وكان x يمثل عدد وحدات العمل الداخلة في الانتاج و y يمثل عدد وحدات رأس المال ولنفرض ان الدالة التالية للمتغيرين x و y تمثل عدد الوحدات المنتجة $f(x,y)=60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$.

ماهي عدد الوحدات المنتجة من جراء استخدام 81 وحدة من وحدات العمل و 16 وحدة من وحدات رأس المال.

<u>الحل:</u> من البيانات المعطاة فأن $x=81$ ، $y=16$ وبالتعويض بالدالة $f(x,y)$ نحصل على مايلي:

$$f(81,16)=60(81)^{\frac{3}{4}}(16)^{\frac{1}{4}}=60(3^4)^{\frac{3}{4}}(2^4)^{\frac{1}{4}}=60(3)^3(2)=60(27)(2)=3240$$

يعني سوف يتم انتاج 3240 وحدة من وحدات الانتاج .

المشتقة الجزئية

درسنا سابقا فكرة المشتقة والتي تقيس معدل التغير في الدالة f بدلالة تغير المتغير المستقل x . والآن سندرس مشتقة دالة لمتغيرين أو أكثر.

أفرض أن $f(x,y)$ دالة للمتغيرين x و y . الرغبة في معرفة التغير الحاصل في الدالة بدلالة التغير في المتغيرين x و y ، يجب أن نعرف مشتقتين للدالة $f(x,y)$ (والتي تسمى المشتقة الجزئية) . واحدة بدلالة المتغير x والاخرى بدلالة y .

- نرمز للمشتقة الجزئية للدالة $f(x,y)$ بدلالة المتغير x بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x}$ حيث يتم اشتقاق الدالة f بدلالة x فقط ومعالجة y على اعتباره ثابت وتعرف كما يلي : $\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$
- ونرمز للمشتقة الجزئية للدالة $f(x,y)$ بدلالة المتغير y بالرمز $\frac{\partial f}{\partial y}$ حيث يتم اشتقاق الدالة f بدلالة y فقط ومعالجة x على اعتباره ثابت وتعرف كما يلي : $\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{h}$

والمشتقات الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ تشير الى المشتقة الجزئية الاولى للدالة $f(x,y)$ بالنسبة الى x و y على التوالي .

<u>مثال7:</u> لتكن $f(x,y)=5x^3y^2$. أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$

<u>الحل:</u> لحساب المشتقة الجزئية الاولى $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، نفكر اولاً باعادة كتابة الدالة $f(x,y)$ وكما يلي :

$f(x,y)=(5y^2)\,x^3$ حيث تؤكد بأن $(5y^2)$ والتي تم وضعها بين قوسين تعالج بأعتبارها ثابت. وعلى هذا الاساس تصبح الدالة f وكأنها دالة لمتغير هو x ويتم اشتقاق f بدلالة المتغير x كما يلي :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(5y^2)\,x^3=3(5y^2)\,x^2=15y^2x^2$$

ولأجل ايجاد المشتقة الجزئية الاخرى $\frac{\partial f}{\partial y}$ فبالامكان استخدام نفس الفكرة اعلاه بأعادة كتابة الدالة f كما يلي :

$f(x,y)=(5x^3)\,y^2$ حيث تعتبر $(5x^3)$ ثابت ونشتق الدالة f بدلالة المتغير y كما يلي :

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(5x^3)y=10x^3y$$

مثال8: أفرض أن $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 5y$ أحسب $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ عند النقطة $(x,y) = (1,4)$.

الحل: نجد اولاً المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y$$

ولحساب هذه المشتقة عند النقطة $y = 4, x = 1$ نعوض كما يلي :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 6(1) + 2(4) = 6 + 8 = 14$$

ونجد المشتقة الجزئية الأخرى $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 5$$

نعوض مباشرة بالمشتقة اعلاه للحصول على قيمة المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial y}$ عند النقطة $(1,4)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = 2(1) + 5 = 7$$

مثال9: أفرض أن $f(x,y) = \frac{y}{x+3y}$ أحسب $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$

الحل: لحساب $\frac{\partial f}{\partial x}$ نستخدم قواعد المشتقة الاعتيادية باعتبار f كدالة لمتغير واحد هو x مع اعتبار y ثابت .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+3y)(0)-y(1)}{(x+3y)^2} = \frac{-y}{(x+3y)^2}$$

ولحساب $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، أيضاً نستخدم قواعد الاشتقاق السابقة لاشتقاق الدالة f بدلالة المتغير y واعتبار x ثابت .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x+3y)(1)-y(3)}{(x+3y)^2} = \frac{x+3y-3y}{(x+3y)^2} = \frac{x}{(x+3y)^2}$$

ومن الممكن تعميم المشتقة الجزئية لتشمل دوال لأكثر من متغيرين وذلك بأخذ المشتقة بدلالة أحد المتغيرات واعتبار بقية المتغيرات ثابتة .

لتكن $f(x,y,z)$ دالة لثلاث متغيرات فإن $\frac{\partial f}{\partial x}$ تدعى مشتقة جزئية للدالة f بدلالة x مع اعتبار ان y و z ثوابت . كذلك فإن $\frac{\partial f}{\partial y}$ تدعى مشتقة جزئية للدالة f بدلالة y مع اعتبار ان x و z ثوابت . وأن $\frac{\partial f}{\partial z}$ تدعى مشتقة جزئية للدالة f بدلالة z مع اعتبار ان x و y ثوابت .

مثال10: أفرض أن $f(x,y,z) = x^2y^3 + y^2z + x^4z^3$ دالة لثلاث متغيرات (x,y,z)

ولايجاد المشتقة الجزئية للدالة f بدلالة x مع اعتبار كل من y و z ثوابت هي :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3z^3$$

وبنفس الاسلوب تعرف

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 3x^4z^2$$

مثال11: (واجب) أفرض أن $f(x,y,z) = x^2yz - 3z$

أحسب كل من $\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}(2,3,1)$

مثال12 (تطبيقي): نعود مرة اخرى الى مثال 6 التطبيقي حول دالة الانتاج $f(x,y) = 60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ والتي تعطي عدد الوحدات المنتجة من المنتوج المعين عندما x تمثل وحدات العمل و y يمثل وحدات رأس المال .

a. أوجد $\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}$.

b. أحسب $\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}$ عند النقطة $x = 81\ , y = 16$.

c. فسر الارقام التي تم حسابها في فرع b .

الحل: a.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 60\left(\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = \frac{180}{4}\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = 45\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 60\left(\frac{1}{4}\right)x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{-3}{4}} = \frac{60}{4}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}} = 15\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{4}}$$

b.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(81,16) = 45\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = 45\left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = 45\left(\frac{2}{3}\right)^{4\cdot\frac{1}{4}} = 45\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{90}{3} = 30$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(81,16) = 15\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = 15\left(\frac{3^4}{2^4}\right)^{\frac{3}{4}} = 15\left(\frac{3}{2}\right)^{4\cdot\frac{3}{4}} = 15\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 15\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{405}{8} = 50.62$$

c. الكميات $\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}$ يمكن تعريفها حسب المفهوم الأقتصادي كالاتي :

$\frac{\partial f}{\partial x}$ تمثل الأنتاجية الحدية للعمل ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ تمثل الأنتاجية الحدية لرأس المال

وعليه إذا ثبتنا كمية رأس المال عند المستوى $y = 16$ وكمية العمل ازدادت بوحدة واحدة فإن عدد الوحدات المنتجة من الأنتاج ستزداد بحدود 30 وحدة . وبصورة مماثلة ان زيادة كمية رأس المال بوحدة واحدة مع ثبوت مستوى العمل عند 81 وحدة فإن كمية الوحدات المنتجة من الانتاج ستزداد بحدود 51 وحدة .

المشتقات الجزئية ذات الرتب العليا

مثلما وجدنا مشتقة ثانية لدالة المتغير الواحد $f(x)$ فبإمكاننا ايجاد مشتقة جزئية ثانية لدالة المتغيرين $f(x,y)$.
بما أن $\frac{\partial f}{\partial x}$ هي دالة للمتغيرين x و y فبالامكان أشتقاقها بالنسبة الى x أو y . كذلك فإن $\frac{\partial f}{\partial y}$ هي دالة للمتغيرين x و y وبالامكان أشتقاقها بالنسبة الى x أو y . وعليه يمكن أيجاد المشتقات الجزئية الثانية التالية :

المشتقة الجزئية للدالة $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة الى x هي $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ، المشتقة الجزئية للدالة $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة الى y هي $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

المشتقة الجزئية للدالة $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة الى y هي $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ، المشتقة الجزئية للدالة $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة الى x هي $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

لاحظ أن الدالة للمتغيرين $f(x,y)$ والمستخدمة في معظم التطبيقات لها الخاصية $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

مثال13: لتكن لدينا الدالة التالية $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$

أحسب $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

الحل: نجد أولاً المشتقات الجزئية الأولى $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ وهما

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 4y$$

ولحساب المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ، فإننا نشتق $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة الى x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

وبصورة مماثلة نجد المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ باشتقاق $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة الى y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

يتم حساب المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ باشتقاق الدالة $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة الى y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$

أخيراً يتم حساب المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ باشتقاق الدالة $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة الى x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$$

مثال14: (واجب) أوجد المشتقات الجزئية الاولى والثانية للدوال التالية :

1. $f(x,y) = x \cos y - y \cos x$
2. $f(x,y) = x^2y^3 + y^3x - 7$

مثال15 (تطبيقي): نعود مرة أخرى للمثال التطبيقي حول دالة الانتاج ولكن مفترضينفي هذه الحالة أن دالة الانتاج هي $f(x,y) = 6x - 3x^2 + 8xy + 40y - 6y^2$ والتي تعطي عدد الوحدات المنتجة من المنتوج المعين عندما كان x يمثل وحدات العمل و y يمثل وحدات رأس المال الداخلة في الانتاج .

أوجد $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ثم فسر النتائج .

الحل: نجد أولاً الانتاجية الحدية للعمل والانتاجية الحدية لرأس المال والتي تتمثل بالمشتقة الجزئية الأولى للدالة وهما $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ على التوالي

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6 - 6x + 8y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8x + 40 - 12y$$

نجد ثانياً المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ وهما على التوالي $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12$

واللذان يشيران الى التغيير في الانتاجية الحدية للعمل ورأس المال على التوالي فبالنسبة الى الدالة الأولى $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6$ تشير الى أن الانتاجية الحدية للعمل تتناقص لجميع قيم x وبصورة مماثلة نجد أن الدالة الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12$ تشير الى أن الانتاجية الحدية لرأس المال تتناقص لجميع قيم y .

ملاحظة: من الممكن تعميم حالة المشتقة الجزئية الثانية لتشمل مشتقات جزئية لرتب أعلى مثل مشتقة جزئية ثالثة ومشتقة جزئية رابعة ... الخ .

فمثلاً $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ تمثل أحد المشتقات الجزئية الثالثة حيث يتم اشتقاق f ثلاث مرات ، المرة الاولى بالنسبة الى x والثانية بالنسبة الى y والثالثة بالنسبة الى x مرة أخرى .

مثال16: إذا كانت $f(x,y) = x^3y^7 - x^4y^2 + 10$

فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^7 - 4x^3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 21x^2y^6 - 8x^3y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = 42xy^6 - 24x^2y$$

وبصورة مماثلة يمكن ايجاد المشتقة الثالثة الاخرى $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ وكما يلي :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 7x^3y^6 - 2x^4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 42x^3y^5 - 2x^4$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = 126x^2y^5 - 8x^3$$

وبنفس الاسلوب يمكن ايجاد المشتقات الجزئية الأخرى من ذوى الرتب العليا .

تمارين عامة

1. أوجد المشتقات الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ لكل من الدوال التالية :

a. $f(x,y) = 3x^4y + 6x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y + 7$

b. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

c. $f(x,y) = xe^{x^2} + y^2 - y\sin x$

d. $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$

2. أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial z}$ لكل من الدوال التالية :

a. $f(x,y,z) = 7x^3yz^2 - 4y^3z + 9x^4z^3$

b. $f(x,y,z) = x^2z + z\cos(xy) - y^2\sin(xz)$

3. إذا كانت $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 5y$ أحسب $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-3)$

4. إذا علمت بأن $f(x,y) = x^4y^3 - y^6x^2$ فأوجد المشتقات الجزئية التالية :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$$

الفصل الثاني (التكامل) Integration

تعريف: إذا كانت f دالة معرفة في الفترة I تسمى الدالة F عكس المشتقة للدالة f إذا كانت $F'(x) = f(x)$ لجميع قيم x في الفترة I .

مثال17: نفرض أن $f(x) = x$ فإن الدالة $F(x) = \frac{x^2}{2}$ هي عكس مشتقة الدالة $f(x)$ كذلك الدوال $G(x) = \frac{x^2}{2} + 7$ ، $H(x) = \frac{x^2}{2} - 6$ عكس مشتقات للدالة $f(x)$.

بصورة عامة إذا كانت الدالة F عكس مشتقة الدالة f موجودة فإن الشكل العام لجميع عكس مشتقات الدالة f هي الصيغة التالية : $F(x) + k$ حيث k ثابت .

تعريف: لنفرض أن $F(x)$ هي عكس مشتقة الدالة $f(x)$ فإن التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ والذي يرمز له بالرمز $\int f(x)dx$ هو : $\int f(x)dx = F(x) + k$ حيث k ثابت .

وعليه فإن التكامل غير المحدود للدالة f هو رمز لجميع عكس المشتقات للدالة f وأن الرمز $\int$ يمثل أشارة التكامل

الصيغ الأساسية للتكامل

قاعدة (1): إذا كانت $n \neq -1$ فإن : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

وإذا كانت $n = -1$ فإن : $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

وإذا كانت $n = 0$ فإن : $\int x^0 dx = \int dx = x + c$

مثال18: أوجد التكاملات غير المحدودة التالية :

a. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

b. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

قاعدة (2): إذا كانت c عدد ثابت فإن : $\int c\, f(x)dx = c\int f(x)dx$

مثال19: أوجد التكاملات غير المحدودة التالية :

a. $\int 10dx = 10\int dx = 10x + c$

b. $\int 6x^{-5}dx = 6\int x^{-5}dx = 6\frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{-3}{2x^4} + c$

قاعدة (3): $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

مثال20: أوجد التكامل غير المحدود التالي : $\int \left[16x^7 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right] dx$

الحل: $\int \left[16x^7 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right] dx = 16\int x^7 dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int \frac{1}{x}dx$

$$= 16\frac{x^8}{8} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln|x| + c = 2x^8 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ln|x| + c$$

قاعدة (4): بما أن $\frac{d}{dx}[f(x)]^{n+1} = (n+1)[f(x)]^n f'(x)$ فإن :

عندما $n \neq -1$ $\quad \int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$

أما في حالة $n = -1$ فإن : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

مثال21: أوجد التكاملات غير المحدودة التالية :

$a. \int (x^2+3x+4)(2x+3)dx$

الحل: نفرض أن $f(x) = x^2+3x+4$ فإن : $f'(x) = 2x+3$

وعليه فإن معادلة التكامل ستصبح بعد التعويض كما يلي :

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{[f(x)]^2}{2} + c = \frac{1}{2}(x^2+3x+4)^2 + c$$

b. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

الحل: نفرض أن $f(x) = x^2+x+1$ فأن $f'(x) = 2x+1$ وبالتعويض في المعادلة اعلاه

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c = \ln|x^2+x+1| + c$$

c. $\int (x^3+1)^4 x^2 dx$

الحل: نفرض أن $f(x) = x^3+1$ فأن $f'(x) = 3x^2$ نحتاج للعدد 3 مع المشتقة لذلك نضرب ونقسم المعادلة على العدد 3 نحصل على : $\int (x^3+1)^4 x^2 dx = \frac{1}{3}(x^3+1)^4\, 3x^2 dx$

$$= \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^5}{5} + c = \frac{(x^3+1)^5}{15} + c$$

d. $\int \frac{t}{1-3t^2}dt$

الحل: نفرض أن $f(t) = 1-3t^2$ وعليه $f'(t) = -6t$ نضرب ونقسم على (-6) نحصل على

$$\int \frac{t}{1-3t^2}dt = -\frac{1}{6}\int \frac{-6t}{1-3t^2}dt = -\frac{1}{6}\ln|1-3t^2| + c$$

e. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3}}$

الحل: نفرض أن $f(x) = x^2-3$ وعليه $f'(x) = 2x$ نضرب ونقسم على (2) نحصل على

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-3}} = \int (x^2-3)^{\frac{-1}{2}}\, 2xdx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2-3} + c$$

f. $\int 9x^2\sqrt{x^3-6}\,dx$

الحل: نفرض أن $f(x)=x^3-6$ وعليه $f'(x)=3x^2$ وبذلك يمكن أعادة كتابة التكامل كما يلي :

$$\int 9x^2\sqrt{x^3-6}\,dx = 3\int\sqrt{x^3-6}\,(3x^2)dx = 3\int(x^3-6)^{\frac{1}{2}}(3x^2)dx$$

$$= 3\,\frac{(x^3-6)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = 3\cdot\frac{2}{3}(x^3-6)^{\frac{3}{2}}+c = 2(x^3-6)^{\frac{3}{2}}+c$$

g. $\int(2x+1)^2dx$

الحل: نفرض أن $f(x)=2x+1$ وعليه $f'(x)=2$ نضرب ونقسم على (2) نحصل على :

$$\int(2x+1)^2dx = \frac{1}{2}\int(2x+1)^2\,2dx = \frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^3}{3}+c = \frac{1}{6}(2x+1)^3+c$$

قاعدة (5): بما أن $\frac{d}{dx}\left[e^{g(x)}\right]=e^{g(x)}g'(x)$ فإن $\int e^{g(x)}\cdot g'(x)dx = e^{g(x)}+k$

وعليه $\int e^x dx = e^x + c$

مثال22: أوجد التكاملات غير المحدودة التالية :

a. $\int e^{2x+1}\,dx$

الحل: نفرض أن $g(x)=2x+1$ فإن $g'(x)=2$ نضرب ونقسم على (2) نحصل على :

$$\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x+1}\,2dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}+c$$

b. $\int\left(xe^{x^2}+\frac{1}{3x+1}\right)dx$

الحل: بتوزيع التكامل على الجمع نحصل على :

$$\int\left(xe^{x^2}+\frac{1}{3x+1}\right)dx = \int xe^{x^2}dx+\int\frac{1}{3x+1}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,2xdx+\frac{1}{3}\int\frac{3dx}{3x+1}$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{3}\ln|3x+1|+c$$

c. $\int\frac{x^4+x^2+8}{4x^3}dx$

الحل: نوزع حدود البسط على المقام نحصل على :

$$\int\frac{x^4+x^2+8}{4x^3}dx = \int\frac{x^4}{4x^3}dx+\int\frac{x^2}{4x^3}dx+\int\frac{8}{4x^3}dx = \int\frac{x}{4}dx+\int\frac{dx}{4x}+\int\frac{2}{x^3}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int x\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+2\int x^{-3}dx = \frac{1}{4}\,\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln|x|+2\,\frac{x^{-2}}{-2}+c$$

$$= \frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{x^2}+c\,.$$

d. $\int (4x+4)e^{x^2+2x}dx$

الحل: نفرض أن $g(x) = x^2 + 2x$ فإن $g'(x) = 2x + 2$ نعيد كتابة التكامل كما يلي:

$$\int (4x+4)e^{x^2+2x}dx = 2\int e^{x^2+2x}(2x+2)dx = 2e^{x^2+2x} + c$$

أمثلة تطبيقية

مثال23: إذا كانت الكلفة الحدية لعملية انتاجية معينة هي $C'(x) = \frac{1}{60}x^2 - x + 615$ وكانت التكاليف الثابتة للأنتاج هي 1000 دينار فأوجد: (a) دالة تكلفة الانتاج. (b) التكلفة الكلية لانتاج 30 وحدة.

الحل: (a) $C(x)$ هي عكس مشتقة الدالة $C'(x)$ وعليه فإن التكامل للدالة $C'(x)$ هو :

$$\int C'(x)dx = \int \left[\frac{1}{60}x^2 - x + 615\right]dx = \frac{1}{60}\int x^2dx - \int xdx + 615\int dx$$

$$C(x) = \frac{x^3}{180} - \frac{x^2}{2} + 615x + c$$

وبما أن التكاليف الثابتة للانتاج كانت 1000 دينا يعني أن $C(0) = 1000$ وعليه فإن :

$$C(x) = \frac{x^3}{180} - \frac{x^2}{2} + 615x + c \Rightarrow C(0) = \frac{0^3}{180} - \frac{0^2}{2} + 615(0) + c$$

$$\therefore C(0) = c = 1000$$

ومنها نحصل على أن دالة تكلفة الانتاج هي : $C(x) = \frac{x^3}{180} - \frac{x^2}{2} + 615x + 1000$

(b) التكلفة الكلية لانتاج 30 وحدة $C(30) = \frac{(30)^3}{180} - \frac{(30)^2}{2} + 615(30) + 1000$

$= 150 - 450 + 18450 + 1000 = 19150$ دينار تكلفة 30 وحدة

مثال24: قدر أن بعد x شهر من الان سيتغير سكان احدى المدن بمعدل $2 + 6\sqrt{x}$ نسمة في الشهر إذا علمت أن نفوس هذه المدينة الحالي هو 5000 نسمة ماهو نفوس المدينة بعد 9 أشهر من الآن ؟

الحل: نفرض أن $P(x)$ يمثل سكان المدينة بعد x شهر من الآن فإن $P'(x)$ سيمثل معدل التغير في السكان بدلالة الزمن $\frac{dp}{dx} = 2 + 6\sqrt{x}$ وهذه تؤدي إلى أن دالة سكان المدينة P هو عكس مشتقة الدالة $2 + 6\sqrt{x}$ وهذا يعني

$$P(x) = \int \left(2 + 6\sqrt{x}\right)dx = 2\int dx + 6\int x^{\frac{1}{2}}dx = 2x + 6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2x + 4\,x^{\frac{3}{2}} + c$$

ولتحديد قيمة الثابت c نستخدم المعلومات المذكورة بأن نفوس هذه المدينة الحالي هو 5000 نسمة أي أن $P(0) = 5000$ وعليه $P(0) = 2(0) + 4(0)^{\frac{3}{2}} + c = 5000$ أي أن $c = 5000$ وعليه فإن

$$P(x) = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + 5000$$

وأن سكان المدينة بعد 9 أشهر من الآن سيصبح :

$$P(9) = 2(9) + 4(9)^{\frac{3}{2}} + 5000 = 18 + 108 + 5000 = 5126.$$

<u>مثال25:</u> وجد أحد المصانع بأن التكلفة الحدية هي $MC'(q) = 3q^2 - 60q + 400$ دينار للوحدة الواحدة عندما ينتج المصنع q وحدة. الكلفة الكلية لانتاج أول وحدتين هو 900 دينار . ماهي التكلفة الكلية لانتاج أول خمس وحدات؟

<u>الحل:</u> بما أن التكلفة الحدية هي مشتقة دالة التكلفة الكلية $C(q)$. هذا يعني أن $C(q)$ يجب أن يمثل عكس مشتقة الدالة $MC'(q) = 3q^2 - 60q + 400$. إذن $C(q) = \int MC'(q)dq$

$$= \int [3q^2 - 60q + 400]dq = q^3 - 30q^2 + 400q + k$$

ولتحديد قيمة الثابت k نستخدم الحقيقة التالية $C(2) = 900$ يعني

$$C(2) = 900 = (2)^3 - 30(2)^2 + 400(2) + k \Rightarrow 900 = 688 + k \Rightarrow k = 212$$

هذا يعني أن دالة الكلفة الكلية هي : $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 212$

ولايجاد التكلفة الكلية لانتاج أول خمس وحدات

$$C(5) = (5)^3 - 30(5)^2 + 400(5) + 212 = 125 - 750 + 2000 + 212 = 1587$$ دينار

تمـاريـن عـامــة

(a) أوجد التكاملات التالية :

1. $\int 10^x dx$ 2. $\int x\sqrt{x^2 - 2}dx$ 3. $\int \frac{2xdx}{(x^2-2)^3}$ 4. $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$ 5. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

6. $\int \frac{x^4 \ln(x^5-7)}{x^5-7}$ 7. $\int \left(x\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+2}\right)dx$ 8. $\int \cos 2x \ \sin 2x \ dx$

(b) التكلفة الحدية لاحدى الشركات عند مستوى الانتاج x وحدة هو $C'(x) = \frac{1}{50}x^2 - 2x + 107$ وإذا كانت التكلفة الثابتة للانتاج للشركة هو 2000 دينار فاوجد:

1. دالة كلفة الانتاج . 2. الكلفة الحقيقية لانتاج 30 وحدة .

(c) لتكن دالة الايراد الحدي والكلفة الحدية لاحدى المصانع على التوالي هي $R'(x) = 150 - x$ و $C'(x) = \frac{1}{10}x^2 - 4x + 110$ والتكلفة الكلية لانتاج 30 وحدة هي 4000 دينار

1. ماهي التكلفة الثابتة للانتاج 2. لماذا $R(0) = 0$ ؟ 3. عبر عن الربح كدالة للانتاج x

(d) احدى شركات صناعة الزيوت ستنتج مسحوق جديد للغسيل. التكاليف الثابتة 17000 دينار. ودالة التكلفة الحدية هي دالة الى x التي تمثل عدد الصناديق المنتجة من المسحوق والتي يمكن التعبير عنها كما يلي : $MC(x) = x\sqrt{x^2 + 900}$ ماهي التكلفة الكلية لانتاج 40 صندوق ؟

التكامل المحدود

الآن ننتقل إلى مسألة رئيسية تتعلق بكيفية ايجاد مساحة منطقة ما وسنشير إلى هذه المنطقة بأنها المنطقة تحت المنحني $y = f(x)$ وفوق محور السينات وبين خطين عموديين على محور السينات $x = a$ و $y = b$. سنحاول تطبيق الحل لهذه المسألة في حل مجموعات من المسائل المتعلقة بالمجال المالي والمحاسبي.

<u>تعريف:</u> لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ إذا كانت F عكس مشتقة الدالة f عندئذ $F(b) - F(a)$ تدعى التكامل المحدود من $x = a$ إلى $y = b$ وتستعمل الرموز التالية لتحديد التكامل المحدود

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>مثال26:</u> أوجد قيمة التكامل التالي : $\int_1^2 x^3 dx$

<u>الحل:</u>

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{(2)^2}{4} - \frac{(1)^2}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

<u>ملاحظة:</u> من المهم جداً التمييز بين التكامل المحدود والتكامل غير المحدود فالتكامل غير المحدود يمثل جميع عكس مشتقات الدالة f وعليه فإنه دالة ويحوي على ثابت ما. بينما التكامل المحدود فله قيمة مفردة.

<u>مثال27:</u> أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-1}^1 x^2(x^3+1)^6\, dx$

<u>الحل:</u>

$$\int_{-1}^1 x^2(x^3+1)^6\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 (x^3+1)^6\, 3x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^7}{7}\Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{21}(x^3+1)^7\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{21}(2)^7 - \frac{1}{21}(0)^7 = \frac{128}{21}.$$

خواص التكامل المحدود

1. إذا كان c ثابت فإن $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) \mp g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$
3. إذا كانت $a < b < c$ فإن : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

<u>مثال28:</u> أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_1^2 \left(x^3 + 2\sqrt{x}\right)dx$

<u>الحل:</u>

$$\int_1^2 \left(x^3 + 2\sqrt{x}\right)dx = \int_1^2 x^3 dx + 2\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2$$

$$= \left(\frac{(2)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4}\right) + \left(\frac{4}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{15}{4} + \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}\right) - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{45-16}{12} + \frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{29}{12} + \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

مثال29: أثبت أن $\int_1^5 x\,dx = \int_1^3 x\,dx + \int_3^5 x\,dx$

الحل: نجد أولاً ناتج الطرف الأيسر للتكامل : $\int_1^5 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^5 = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = \frac{24}{2} = 12$

الطرف الأيمن: $\int_1^3 x\,dx + \int_3^5 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + \frac{x^2}{2}\Big|_3^5 = \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2}\right) = 4 + 8 = 12$

وعليه فإن : $\int_1^5 x\,dx = \int_1^3 x\,dx + \int_3^5 x\,dx$

مثال30: أوجد تكامل مايأتي : $\int_1^2 (x^3 + 3x^2 - 2x + 3)dx + \int_1^2 (3x^3 - 2x + 2)dx$

الحل: بتطبيق الخاصية الثانية من التكامل المحدود نحصل على مايلي:

$$\int_1^2 (x^3 + 3x^2 - 2x + 3)dx + \int_1^2 (3x^3 - 2x + 2)dx =$$

$$= \int_1^2 [(x^3 + 3x^2 - 2x + 3) + (3x^3 - 2x + 2)]dx = \int_1^2 (4x^3 + 3x^2 - 4x + 5)dx$$

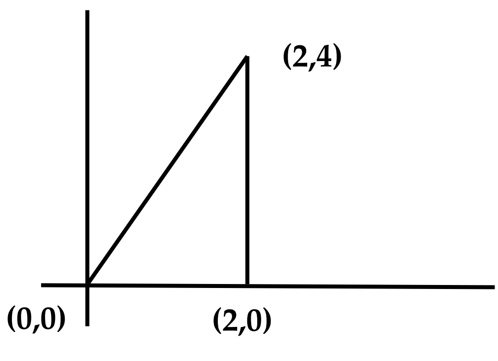
$$= (x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x)\Big|_1^2 = (16 + 8 - 8 + 10) - (5) = 26 - 5 = 21.$$

أمثلة حول المساحة

مثال31: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الخطوط $y = 2x$ و $x = 2$ ومحور السينات.

الحل: المنطقة المطلوبة هي المثلث في الشكل أدناه ومساحته تساوي 4 وحدات مساحة حسب ماهو معروف في الجبر الاعتيادي حيث أن مساحة المثلث نصف القاعدة في الأرتفاع ولكن بأستخدام التكامل المحدود فإن الدالة هي $y = 2x$ وكذلك فإن $a = 0$ و $b = 2$ وعليه فإن المساحة تحسب كما يلي:

$$\text{Area} = \int_0^2 2x\,dx = x^2\Big|_0^2 = 4$$

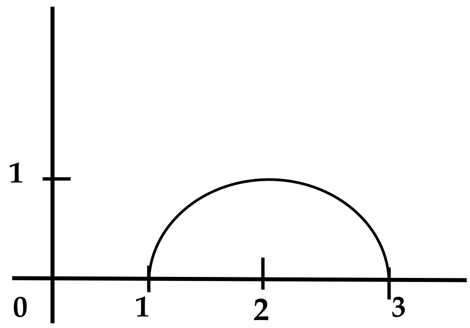


مثال32: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = -x^2 + 4x - 3$ ومحور السينات.

الحل: نجد تقاطع المنحني مع محور السينات ، نساوي الدالة بالصفر ونجد قيم x كالآتي:

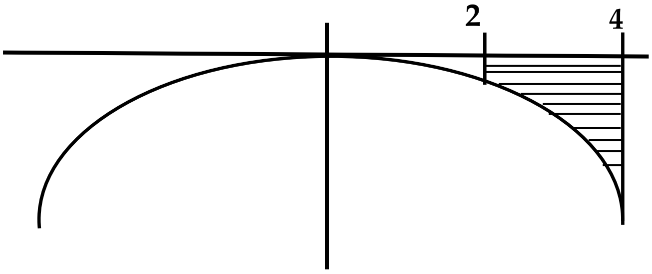
$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow (-x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 3\,, x = 1$ أي أن المنحني سيقطع محور السينات عند النقاط $(1,0)$ و $(3,0)$ وهذا يعني أن المنطقة المطلوبة هي المنطقة المحصورة بين المنحني ومحور السينات والتي تمثل من $x = 1$ الى $x = 3$ وعليه

$$Area = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx =$$
$$= (-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x)\Big|_1^3$$
$$= (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{4}{3}$$



مثال33: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = -x^2$ والمستقيمات $x = 4 , x = 2$ ومحمور السينات.

الحل: نرسم مخطط لهذه المساحة من ملاحظة المخطط نجد ان قيم الدالة هي دائماً سالبة وعليه تكون المساحة المحصورة بين المنحني ومحور السينات والتي تمتد من $x = 2$ إلى $x = 4$ كما يلي:



$$Area = \left|\int_2^4 -x^2 dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3}\Big|_2^4\right| = \left|-\frac{64}{3} + \frac{8}{3}\right| = \left|-\frac{56}{3}\right| = \frac{56}{3}$$

المساحة المحصورة بين منحنيين

تعريف: لتكن f و g دوال مستمرة للفترة $[a,b]$ وكانت $f(x) \geq g(x)$ لجميع قيم x لتلك الفترة عندئذ المساحة المحصورة بين المنحنيات f و g والخطوط العمودية على محور السينات عند النقاط $x = a$ و $x = b$ تكون :

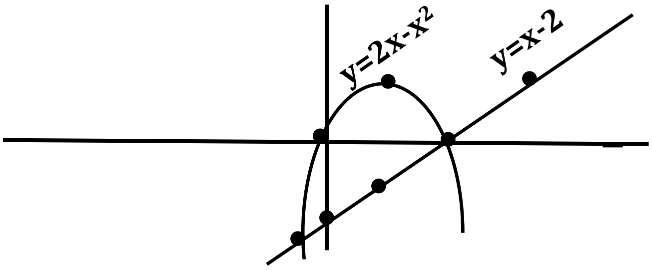
$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

مثال34: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x - 2$ و $y = 2x - x^2$.

الحل: نساوي المنحنيين لإيجاد نقاط تقاطع المنحنيات والتي تمثل حدود التكامل

$$x - 2 = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 2)(x + 1) \Rightarrow x = 2 , x = -1$$

بما أن $2x - x^2 \geq x - 2$ لجميع قيم x في الفترة $[-1,2]$ كما نلاحظ ذلك من الرسم المجاور وعليه فإن المساحة المحصورة بين المنحنيين يمكن تمثيلها كما يلي:



$$Area=\int_{-1}^{2}[(2x-x^2)-(x-2)]dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{20+7}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.$$

ملاحظة: إن الأسلوب المقترح هنا يعتمد على الحقيقة بأن $f(x)\geq g(x)$ للفترة $[a,b]$ وإذا لم تكن الحالة كذلك فإن المساحة يجب أن تحتسب بطريقة تجميع المساحات ويمكن توضيح هذه الفكرة عن طريق المثال التالي:

مثال35: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y=x^2$ والمنحني $y=(x-2)^2$ من $x=0$ إلى $x=2$.

الحل: لإيجاد نقاط تقاطع الدالتين نساوي الدالتين $x^2=(x-2)^2$

$$x^2=x^2-4x+4\Rightarrow x=1$$

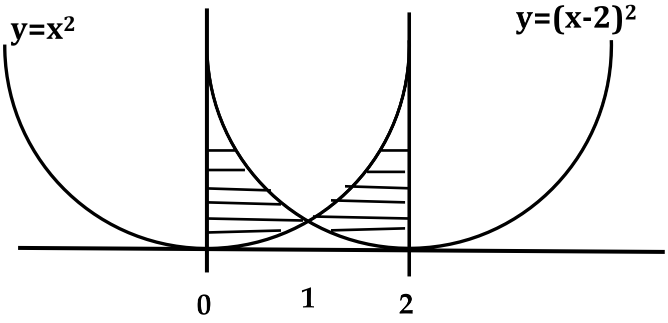
وعليه فإن احد المنحنيات من الممكن أن لايقع دائماً فوق المنحني الآخر من $x=0$ إلى $x=2$.

وبذلك فإننا لانستطيع تطبيق القاعدة لإيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين مباشرة. وإنما تقسيم المنطقة إلى منطقتين الأولى من $x=0$ إلى $x=1$ والثانية من $x=1$ إلى $x=2$ ومن خلال مخطط الدوال نلاحظ أن في المنطقة الأولى المنحني $y=(x-2)^2$ هو في الأعلى بينما بالنسبة للمنطقة الثانية فإن الدالة $y=x^2$ هي التي تقع إلى الاعلى ونتيجة لذلك مساحة المنطقة الأولى + مساحة المنطقة الثانية = المساحة المطلوبة .

$$Area\ 1=\int_{0}^{1}[(x-2)^2-x^2]dx=\int_{0}^{1}(-4x+4)dx=(-2x^2+4x)\Big|_{0}^{1}=2$$

$$Area\ 2=\int_{1}^{2}[x^2-(x-2)^2]dx=\int_{1}^{2}(4x-4)dx=(2x^2-4x)\Big|_{1}^{2}=0-(-2)=2$$

$$Area=Area\ 1+Area\ 2=2+2=4$$



ملاحظة: في المثال السابق من الممكن أخذ الدالة الأولى مطروح منها الدالة الثانية في المساحة الأولى والثانية لكن بشرط أخذ القيمة المطلقة للمساحات الأولى والثانية كالآتي:

$$Area=\left|\int_{0}^{1}[x^2-(x-2)^2]dx\right|+\left|\int_{1}^{2}[x^2-(x-2)^2]dx\right|$$

$$=\left|\int_{0}^{1}(4x-4)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}(4x-4)dx\right|=|2x^2-4x|\,_{0}^{1}+|2x^2-4x|\,_{1}^{2}$$

$$=|-2|+|0-(-2)|=2+2=4.$$

المصفوفات Matrices

يتعلق هذا الجزء بدراسة كيفية معالجة كمية كبيرة من البيانات والمعلومات ووصفها برموز صغيرة وبسيطة . كما لائمت إلى حد كبير رموز المصفوفات بكتابة برامج الحاسبة الالكترونية والتي ساهمت في سعة انتشارها لتخدم معظم العلوم التطبيقية .

سنتطرق في هذا الفصل إلى دراسة بعض التعاريف المهمة وأنواع المصفوفات والعمليات الجبرية لها وكيفية استخدامها لحل كثير من المشاكل التطبيقية .

المصفوفات وأنواعها

<u>تعريف:</u> المصفوفة ترتيب من الاعداد مكونة من صفوف وأعمدة على شكل مستطيل والأعداد في الترتيب تسمى عناصر المصفوفات وعادة تحاط بأقواس صغيرة أو كبيرة .

<u>مثال39:</u> تعتبر التكوينات التالية مصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\\ 6 & 7\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 3\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}0 & -5 & 2\\ \sqrt{2} & \pi & 3\\ -1 & 4 & 7\end{bmatrix}\ ,\ D=\begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}\ ,\ E=\begin{bmatrix}-3\\ 9\\ 2\end{bmatrix}$$

من المثال أعلاه نلاحظ أن المصفوفات تختلف في أبعادها أو درجتها ويتحدد درجة المصفوفة منمعرفة عدد الصفوف وعدد الأعمدة .

<u>تعريف:</u> إذا كانت مصفوفة ما مكونة من m صفاً و n عموداً فنقول أن المصفوفة من درجة $m \times n$ وهي مكونة من mn من العناصر .

لإيجاد درجة المصفوفة في المثال السابق وبتطبيق التعريف نجد مايلي:

المصفوفة A من الدرجة 2×3 والمصفوفة B من الدرجة 3×1 والمصفوفة C من الدرجة 3×3 والمصفوفة D من الدرجة 1×1 والمصفوفة E من الدرجة 1×3 .

الصيغة العامة للمصفوفة

وبصورة عامة إذا كانت A مصفوفة فإن a_{ij} يمثل العنصر الذي في الصف i والعمود j للمصفوفة A ويمكن كتابة المصفوفة العامة من الدرجة $m \times n$ على الصورة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

المصفوفات الخاصة

<u>تعريف</u> المصفوفة الصفية هي المصفوفة المكونة من صف واحد .

<u>مثال40:</u> تعتبر المصفوفات التالية مصفوفات صفية $A=\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-2 & 56 & 102\end{bmatrix}$

المصفوفة A من الدرجة 2×1 بينما المصفوفة B من الدرجة 3×1 .

تعريف: المصفوفة العمودية هي المصفوفة المكونة من عمود واحد .

مثال41: تعتبر المصفوفات التالية مصفوفات عمودية $C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \ D = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$

المصفوفة C من الدرجة 3×1 بينما المصفوفة D من الدرجة 4×1 .

تعريف: المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة .

مثال42: المصفوفات التالية هي مصفوفات مربعة $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \ , \ F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ -4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

المصفوفة E من الدرجة 2×2 بينما المصفوفة F من الدرجة 3×3 .

تعريف: المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفاراً ويرمز لها عادة بالرمز 0 .

مثال43: $[0 \quad 0 \quad 0] \ , \ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ [0]$ جميع هذه المصفوفات هي مصفوفات صفرية .

تعريف: العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ في مصفوفة A من الدرجة $n \times n$ يقال لها عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A .

مثال44: لتكن لدينا المصفوفة التالية : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

فإن عناصر القطر الرئيسي هي : $a_{11} = 1 \ , \ a_{22} = 5 \ , \ a_{33} = 8$

تعريف: المصفوفة القطرية هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفاراً بإستثناء العناصر التي تقع على القطر الرئيسي أي بعبارة أخرى $a_{ij} = 0$ لجميع $i \neq j$ وقطرها الرئيسي مكون من العناصر a_{ii} ويمكن كتابة المصفوفة القطرية بالشكل التالي : $diag(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn})$

مثال45: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ تعتبر مصفوفة قطرية ويمكن أن تكتب كالآتي: $diag(1 \ 5 \ 9)$.

تعريف: المصفوفة القياسية هي المصفوفة القطرية التي تكون عناصر قطرها الرئيسي كمية قياسية k أي : $diag(k \ \ k \dots k)$.

مثال46: المصفوفات التالية هي مصفوفات قياسية $[-2 \quad -2 \quad -2] = B \ , \ A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

تعريف: مصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية تكون جميع عناصر القطر تساوي واحد ويرمز لها بالرمز I_n .

مثال47: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفات وحدة من الدرجة 3×3 و 2×2 على التوالي .

تعريف: المصفوفة المثلثية العليا هي مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ بحيث أن $a_{ij} = 0$ لكل $i > j$ أي جميع عناصر المصفوفة الواقعة تحت القطر أصفاراً .

مثال48: $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية عليا .

تعريف: المصفوفة المثلثية السفلى هي مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ بحيث أن $a_{ij} = 0$ لكل $i < j$ أي جميع عناصر المصفوفة الواقعة فوق القطر أصفاراً .

مثال49: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية سفلى .

العمليات الجبرية على المصفوفات

تعريف: تتساوى المصفوفتان A و B إذا كانت كل من A و B من نفس الدرجة والعناصر المتناظرة متساوية .

مثال50: إذا كانت $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$ فإنه بالإمكان إيجاد قيمة x وذلك لأن العناصر المتناظرة متساوية وعليه $3x + 2 = 11$ ومنها نحصل على ان $x = 3$.

تعريف: إذا كانت المصفوفتان A و B من نفس الدرجة $m \times n$ فإن مجموعهما $A + B$ هو المصفوفة C من الدرجة $m \times n$ والتي نحصل عليها بجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين .

مثال51: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ لذلك فإن مجموعهما :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

وبالمثل يمكن تعريف الفرق بين مصفوفتين $A - B$ هو المصفوفة D من نفس الدرجة $m \times n$ والتي نحصل عليها من طرح عناصر B من العناصر المتناظرة للمصفوفة A وعليه تكون D للمثال السابق :

$$D = A - B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 8 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

مثال52: لتكن لدينا المصفوفتين التاليتين $A = \begin{bmatrix} x+2 \\ 3y-7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4-y \\ x-3 \end{bmatrix}$ أوجد كل من x و y التي تجعل $A = B$.

الحل: العناصر المتناظرة متساوية أي $x + 2 = 4 - y$ و $3y - 7 = x - 3$ وتحل المعادلتين آنياً مع مجهولين

من المعادلة الأولى لدينا $x = 2 - y$ نعوضها في المعادلة الثانية نحصل على

$$3y - 7 = x - 3 \xrightarrow{x=2-y} 3y - 7 = 2 - y - 3 \Rightarrow 4y = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

نعوض عن y لإيجاد قيمة x : $x = 2 - y \xrightarrow{y=\frac{3}{2}} x = 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

تعريف: إذا كانت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ وكان c أي عدد قياسي فيكون حاصل الضرب cA هو المصفوفة من الدرجة $m \times n$ بضرب كل عنصر للمصفوفة A في c .

مثال53: إذا كانت A هي المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ فإن :

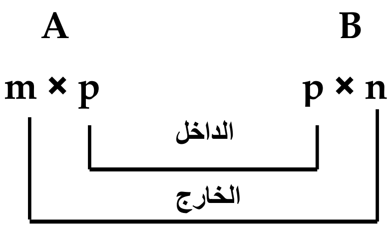
$$\frac{1}{2}\,A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad -2\,A = \begin{bmatrix} -8 & -10 & 2 \\ 4 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

مثال54: (واجب) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ أوجد $2A + 3B$.

مثال55: (واجب) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة B بحيث أن $A + B = 0$.

تعريف: إذا كانت المصفوفة A من الدرجة $m \times p$ والمصفوفة B من الدرجة $p \times n$ فيكون حاصل الضرب AB هو المصفوفة C من الدرجة $m \times n$ والتي تحدد عناصرها كما يلي :

لإيجاد العنصر في الصف i والعمود j للمصفوفة C نستخرج على حدة الصف i من المصفوفة A والعمود j من المصفوفة B ثم نضرب كل عنصر من عناصر الصف بالعنصر المقابل له في العمود ثم نجمع حواصل الضرب هذا يعني اننا نستطيع ضرب مصفوفتان إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة التي تقع على اليسار A ماوٍ لعدد الصفوف في المصفوفة التي تقع على اليمين B وإذا لم يتحقق هذا الشرط فلن يعرف حاصل الضرب وكذلك يمكن أن تحدد درجة المصفوفة AB كما يلي : عدد الأعمدة في B × عدد الصفوف في A



مثال56: لتكن $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$ بما أن المصفوفة A من الدرجة 2×3 والمصفوفة B من الدرجة 3×2 فيكون حاصل الضرب AB مصفوفة من الدرجة 2×2

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \\ d_3 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 & a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 & b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

مثال57: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ أوجد AB و BA .

الحل:
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(7) + (-1)(-2) & 2(0) + (-1)(-3) \\ 0(7) + 3(-2) & 0(0) + 3(-3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 16 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7(2) + 0(0) & 7(-1) + 0(3) \\ -2(2) + (-3)(0) & -2(-1) + (-3)(3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $AB \neq BA$ أي أن ضرب المصفوفات غير إبدالي .

مثال58: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن : $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ وعليه نلاحظ أن حاصل الضرب AB هو مصفوفة صفرية على الرغم من أن المصفوفتان A و B هما مصفوفتان غير صفريتان .

مثال59: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ فأوجد A^2 .

الحل:
$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ومن الممكن إيجاد A^3 حيث :
$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال60: لتكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ وأن $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن حاصل ضرب المصفوفتان I_2A و AI_2 هي كما يلي:

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A$$
$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A$$

وبصورة عامة إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وأن I_n مصفوفة الوحدة من الدرجة n فإن :
$$AI_n = I_nA = A$$

أمثلة تطبيقية

مثال61: في أمتحان الكفاءة للطلبة المتقدمين للدراسات العليا لقسم المحاسبة 20 طالب من جامعة البصرة ، 30 طالب من جامعة الموصل و 40 طالب من جامعة بغداد ظهر في الأمتحان . وقد نجح 15 طالب من كل جامعة في هذا الأمتحان ومن بين الناجحين حصل 10 طلاب من جامعة البصرة ، 5 طلاب من جامعة الموصل و 10 طلاب من جامعة بغداد على درجة الأمتياز في الأمتحان . اكتب المعلومات اعلاه بصيغة المصفوفات .

الحل: اعتبر المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 15 & 15 & 15 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

حيث يمثل الصف الأول عدد الطلاب المتقدمين من جامعة البصرة ، الموصل و بغداد على التوالي . ويمثل الصف الثاني عدد الطلاب الناجحين في الامتحان من الجامعات الثلاثة على التوالي ويمثل الصف الثالث عدد الطلاب الناجحين بدرجة امتياز في الامتحان من الجامعات الثلاثة على التوالي .

مثال62: مصنع للصناعات الألكترونية في قطر ما يصنع ثلاث انواع من التلفزيونات 16 ، 20 ، 26 عقدة . المصفوفة التالية تشير الى مبيعات الانواع الثلاثة من التلفزيونات في مدينتين مختلفتين

$$\begin{array}{ccc} \underline{16} & \underline{20} & \underline{26} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 400 & 300 & 200 \\ 300 & 200 & 100 \end{bmatrix}$$

إذا كانت كلفة جهاز التلفزيون الواحد للأنواع الثلاثة هي 100 ، 200 ، 300 دولار على التوالي وكان سعر البيع للأنواع الثلاثة هي 150 ، 300 ، 400 دولار على التوالي استخدم المصفوفات لإيجاد الربح الكلي .

الحل: لنعتبر حاصل الضرب $[100 \quad 200 \quad 300] \cdot \begin{bmatrix} 400 & 300 \\ 300 & 200 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} = [160,000 \quad 100,000]$

وعليه فإن الكلفة الكلية لانتاج جميع الاجهزة هي : $160,000 + 100,000 = 260,000$ دولار

لنعتبر حاصل الضرب $[150 \quad 300 \quad 400] \cdot \begin{bmatrix} 400 & 300 \\ 300 & 200 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} = [230,000 \quad 145,000]$

وعليه فإن المجموع الكلي لقيمة مبيعات جميع الاجهزة هي : $230,000 + 145,000 = 375,000$ دولار

الربح الكلي لبيع اجهزة التلفزيون هو : $375,000 - 260,000 = 115,000$ دولار

مثال63: كلفة تصنيع الانواع الثلاثة من مكائن السيارات تحدد كما يلي :

نوع السيارة	ساعة العمل	المواد الاولية المستخدمة	مقاولات عمل جانبية
a	40 ساعة	100 وحدة	50 وحدة
b	80 ساعة	150 وحدة	80 وحدة
c	100 ساعة	250 وحدة	100 وحدة

كلفة العمل دولارين في الساعة . كلفة الوحدة من المواد الاولية 10 دولارات وكلفة مقاولات العمل الجانبية دولار واحد للوحدة الواحدة .

أوجد الكلفة الكلية لتصنيع 3000 ماكنة سيارة من نوع a و 2000 ماكنة سيارة من نوع b و 1000 ماكنة سيارة من نوع c .

الحل: لنعتبر المصفوفات التالية $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 40 & 100 & 50 \\ 80 & 150 & 80 \\ 100 & 250 & 100 \end{bmatrix}$

حيث أن المصفوفة M تمثل ساعات العمل ، المواد الاولية المستخدمة ومقاولات العمل الجانبية للانواع الثلاثة من مكائن السيارات a ، b ، c على التوالي .

والمصفوفة N تمثل كلفة كل من العمل ، المواد الاولية المستخدمة ومقاولات العمل الجانبية للوحدة الواحدة .

وعليه فإن :

$$M \cdot N = \begin{bmatrix} 40 & 100 & 50 \\ 80 & 150 & 80 \\ 100 & 250 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1130 \\ 1740 \\ 2800 \end{bmatrix}$$

والتي عناصرها تمثل كلفة تصنيع ماكنة كل نوع من الانواع الثلاثة من السيارات على التوالي .

لنفرض أن $P = [3000 \quad 2000 \quad 1000]$ لتمثل عدد ماكنات السيارات المطلوب تصنيعها على التوالي .

وعليه فإن :

$$P(M \cdot N) = [3000 \quad 2000 \quad 1000] \cdot \begin{bmatrix} 1130 \\ 1740 \\ 2800 \end{bmatrix} = [9,670,000]$$

ومنها نحصل على الكلفة الكلية لتصنيع الانواع الثلاثة من مكائن السيارات a ، b ، c هي 9,670,000 دولار .

تمـــاريـــن عــامــة

1. أوجد قيمة كل من x و y بحيث أن : $\begin{bmatrix} x-2y & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & x+y \end{bmatrix}$
2. أوجد قيمة x ، y ، z بحيث أن : $[2 \quad 3 \quad -4] + [x \quad y \quad z] = [6 \quad -8 \quad 2]$
3. أثبت أن جميع قيم a، b ، c ، d للمصفوفات التالية تحقق $AB = BA$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \;, \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

4. استخدم المصفوفات التالية :

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&4\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&4&-2\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}3&1\\4&-1\\0&2\end{bmatrix}\ ,\ D=\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&2\\0&-1&1\end{bmatrix}\ ,\ E=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$$

لإيجاد العمليات التالية :

$$E(2B)\ ,\ -5E+A\ ,\ E\cdot I_2\ ,\ D(CB)\ ,\ DC+C\ ,\ (D+I_3)C\ ,\ BD\ ,\ AB$$

5. أوجد قيمة x التي تحقق مايلي : $\begin{bmatrix}x&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&2\\0&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\-7\\\frac{5}{4}\end{bmatrix}=0$

6. المصفوفة A تعطي حاجتنا من ثلاثة من المواد الخام لانتاج وحدة واحدة من كل اربع سلع مصنعة وتعطي المصفوفة B عدد الوحدات من كل سلعة الواجب انتاجها اسبوعياً وتعطي المصفوفة العمودية C تكلفة كل وحدة من كل مادة خام استعمل ضرب المصفوفات للحصول على :

a. المواد الخام التي نحتاجها . b. التكلفة الكلية للمواد الخام .

$$\begin{array}{c}\text{المواد الخام}\\ A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&0&1\\4&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}\ \text{السلع}\end{array}\quad ,\quad \begin{array}{c}\text{السلع}\\ B=\begin{bmatrix}4&3&6&2\end{bmatrix}\end{array}\quad ,\quad \begin{array}{c}\text{التكلفة}\\ C=\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}\ \text{المواد الخام}\end{array}$$

7. لدى احدى الشركات ثلاثة فروع a ، b ، c الارباح الفصلية بملايين الدنانير لكل فرع من فروع الشركة ممثلة بالمصفوفة التالية :

$$\text{الفصول}\quad \begin{array}{r}\\ \text{الربيع}\\ \text{الصيف}\\ \text{الخريف}\\ \text{الشتاء}\end{array}\ \overset{\text{الفروع}}{\begin{bmatrix}a&b&c\\6&2&1\\5&-1&2\\8&0&0\\4&3&1\end{bmatrix}}=P$$

1. افترض أن C_i تمثل مصفوفة صفية من الدرجة (1×3) حيث أن عناصرها هي عناصر الصف i في المصفوفة P . أحسب $C_1+C_2+C_3+C_4$ ماذا تمثل العناصر لمصفوفة الجمع الجديدة ؟

2. أفترض أن B_i تمثل مصفوفة عمودية من الدرجة (4×1) حيث ان عناصرها هي عناصر العمود j من المصفوفة P . أحسب $B_1+B_2+B_3$ ماذا تمثل العناصر لمصفوفة الجمع الجديدة ؟

معكوس المصفوفة :

تعريف: إذا كانت المصفوفة A مربعة من الدرجة n وكان بالامكان ايجاد مصفوفة مربعة B من نفس الدرجة بحيث أن $AB = BA = I_n$ فيقال أن A قابلة للأنعكاس وتسمى B معكوس للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} .

ويمكن ملاحظة النقاط التالية :

1. يعرف معكوس المصفوفة فقط للمصفوفات المربعة .
2. إذا كانت B معكوس للمصفوفة A فإن A هي ايضاً معكوس للمصفوفة B .
3. إذا كانت A لها معكوس عندئذ يقال أن A قابلة للأنعكاس .
4. إذا كانت A لها معكوس عندئذ هناك معكوس واحد فقط .
5. ليست جميع المصفوفات المربعة لها قابلية الأنعكاس .

مثال64: المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ هي معكوس للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

وذلك لأن : $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

وأن : $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وعليه فإن : $AB = BA = I_2$.

مثال65: (واجب) لتكن لدينا المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

أثبت أن $AB = BA = I_3$.

مثال66: لتكن لدينا المصفوفة التالية $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ فإذا كانت A لها معكوس عندئذ توجد مصفوفة $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ بحيث أن $AB = BA = I_2$

المعادلة $AB = I_2$ يمكن كتابتها كما يلي : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عندئذ

$\begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 2b_{11} + 3b_{21} & 2b_{12} + 3b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن المصفوفتان متساويتان فعندئذ العناصر المتناظرة

متساوية أي $b_{12} + 2b_{22} = 0$ وكذلك $b_{11} + 2b_{21} = 1$

$$2b_{12} + 3b_{22} = 1 \qquad 2b_{11} + 3b_{21} = 0$$

وبحل المعادلات آنياً : $b_{11} = -3 \ , \ b_{12} = 2 \ , \ b_{21} = 2 \ , \ b_{22} = -1$

وعليه فإن المصفوفة B ستكون كما يلي : $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

مثال67: لتكن لدينا المصفوفة التالية $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ فإذا كانت A لها معكوس عندئذ توجد المصفوفة $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ بحيث أن : $AB = BA = I_2$

المعادلة $AB = I_2$ يمكن كتابتها كما يلي : $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عندئذ

$\begin{bmatrix} 2b_{11} + 3b_{21} & 2b_{12} + 3b_{22} \\ 4b_{11} + 6b_{21} & 4b_{12} + 6b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عندئذ : $2b_{11} + 3b_{21} = 1$ ، $4b_{11} + 6b_{21} = 0$

على الرغم من وجود معادلتان آنيتان مع مجهولين إلا أن هذه المعادلات لايمكن حلها وعليه لايوجد معكوس للمصفوفة A أي لاتوجد مثل المصفوفة B .

المحددات :

يقابل كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n والتي عناصرها اعداد حقيقية ما قيمة رقمية تسمى بمحدد المصفوفة A ويرمز لها بالرمز $|A|$ ويطلق عليه محدد من الدرجة n .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وتجدر الأشارة الى وجوب التمييز بين المصفوفة والمحددة فتستخدم الأقواس ( ) أو [ ] للدلالة عن المصفوفة وتستخدم المستقيمات الرأسية | | للدلالة عن المحددات .

المحددة من الدرجة الثانية :

لتكن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية فإن : $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

مثال68: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ فإن : $|A| = (1)(4) - (2)(3) = -2$

المحددة من الدرجة الثالثة :

المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة تكون على الصورة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

ولإيجاد محددة المصفوفة A نستخدم واحدة من الطريقتين :

1. طريقة الأسهم : في هذه الطريقة نكرر العمود الأول والثاني ثم نجد حاصل ضرب الاقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الاقطار المرافق كالآتي :

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

مثال69: جد محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ -1 & 7 \end{matrix}$$

$$= [(1)(4)(3) + (2)(6)(-1) + (3)(5)(7)] - [(3)(4)(-1) + (1)(6)(7) + (2)(5)(3)]$$
$$= (12 - 12 + 105) - (-12 + 42 + 30) = 105 - 60 = 45$$

2. طريقة المحددات الصغرى : نجد المحددة بالنسبة لاي صف أو عمود فإذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن محددة A بالنسبة للصف الأول هي : $|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

ثم نجد محددات المصفوفات الثنائية .

ونستطيع ايجاد المحددة بالنسبة لاي صف أو عمود وتكون اشارات المصفوفة كالآتي : $A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

مثال70: جد محددة المصفوفة التالية بالنسبة للصف الاول $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

الحل: $|A| = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3(-11) + (-12) + (-8)$

$$= -33 - 12 - 8 = -53$$

مثال71: جد محددة المصفوفة التالية بالنسبة للعمود الثاني $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

الحل: $|A| = -6\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6(41) + (44) - 0$

$$= -246 + 44 = -202$$

منقول المصفوفة (Transpose of Matrix)

وهي تبديل الصفوف بالاعمدة والاعمدة بالصفوف ويرمز لها بالرمز A^T

مثال72: جد منقول كل من المصفوفات التالية :
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل:
$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المرافقة (Adjoint Matrix)

يتناول هذا البند المصفوفة المرافقة ويرمز لها بالرمز $Adj(A)$ للمصفوفة A وفي المصفوفة المرافقة يتم تبديل كل عنصر في المصفوفة A بالعنصر المرافق له فإذا كانت لدينا المصفوفة A مربعة درجتها n تكون المصفوفة المرافقة كالآتي :

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}^T$$

حيث α_{ij} يعتبر العنصر المرافق للعنصر a_{ij} ويتم حسابه حسب القانون الآتي :

$$\alpha_{ij} = (-1)^{(i+j)} |M_{ij}|$$

بينما $|M_{ij}|$ فهي المحددة الناتجة من حذف الصف i والعمود j من المصفوفة A وذلك بالإعتماد على موقع العنصر للمصفوفة A والمراد حساب العنصر المرافق له .

مثال73: إذا كانت لديك المصفوفة A مربعة من الدرجة 2 حيث $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ جد المصفوفة المرافقة للمصفوفة A .

الحل: نجد المصفوفة المرافقة $Adj(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}^T$ حيث :

$$\alpha_{11} = (-1)^2\, 3 = 3 \,,\, \alpha_{12} = (-1)^3\, 5 = -5 \,,\, \alpha_{21} = (-1)^3\, 4 = -4 \,,\, \alpha_{22} = (-1)^4\, 2 = 2$$

أي :
$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال74: إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة الثالثة حيث
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن المعاملات المرافقة للعناصر هي بتطبيق العلاقة $\alpha_{ij} = (-1)^{(i+j)} |M_{ij}|$ نحصل على :

$$\alpha_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}6&3\\-4&0\end{vmatrix}=\mathbf{12}\ ,\ \alpha_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&3\\2&0\end{vmatrix}=\mathbf{6}\ ,\alpha_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&6\\2&-4\end{vmatrix}=\mathbf{-16}$$

$$,\ \alpha_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&-1\\-4&0\end{vmatrix}=\mathbf{4}\ ,\alpha_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&-1\\2&0\end{vmatrix}=\mathbf{2}\ ,\alpha_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&2\\2&-4\end{vmatrix}=\mathbf{16}$$

$$,\ \alpha_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&-1\\6&3\end{vmatrix}=\mathbf{12}\ ,\alpha_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&-1\\1&3\end{vmatrix}=\mathbf{-10}\ ,\alpha_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3&2\\1&6\end{vmatrix}=\mathbf{16}$$

والمصفوفة المرافقة هي :

$$Adj(A)=\begin{bmatrix}12&6&-16\\4&2&16\\12&-10&16\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}12&4&12\\6&2&-10\\-16&16&16\end{bmatrix}$$

طريقة إيجاد معكوس المصفوفة A^{-1}

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n قابلة للأنعكاس فإن معكوس المصفوفة A والذي يرمز له بالرمز A^{-1} يمكن إيجاده كما يلي : $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)$ بشرط أن يكون $|A|\neq 0$.

<u>مثال75:</u> لتكن لدينا المصفوفة A في مثال (73) حيث : $A=\begin{bmatrix}2&4\\5&3\end{bmatrix}$ أوجد A^{-1} .

<u>الحل:</u> نجد محدد المصفوفة A حيث $|A|=6-20=-14\neq 0$ والمصفوفة المرافقة لها هي :

$Adj(A)=\begin{bmatrix}3&-4\\-5&2\end{bmatrix}$ كما في مثال (73) عندئذ يكون معكوس المصفوفة A هو : $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)$

أي :

$$A^{-1}=\frac{1}{-14}\begin{bmatrix}3&-4\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{-14}&\frac{-4}{-14}\\\frac{-5}{-14}&\frac{2}{-14}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{14}&\frac{2}{7}\\\frac{5}{14}&-\frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

<u>مثال76:</u> جد معكوس المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&4\\3&6\end{bmatrix}$

<u>الحل:</u> $|A|=12-12=0$ عندئذ لايوجد معكوس للمصفوفة A .

<u>مثال77:</u> لتكن $A=\begin{bmatrix}3&2&-1\\1&6&3\\2&-4&0\end{bmatrix}$ المصفوفة في مثال (74) أوجد معكوس المصفوفة A .

<u>الحل:</u> $|A|=3\begin{vmatrix}6&3\\-4&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&3\\2&0\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&6\\2&-4\end{vmatrix}=3(12)-2(-6)-(-16)=64$

والمصفوفة المرافقة تم ايجادها سابقا وهي :

$$Adj(A)=\begin{bmatrix}12&4&12\\6&2&-10\\-16&16&16\end{bmatrix}$$

عندئذ يكون معكوس المصفوفة A هو $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

تمــاريــن عــامــة :

1. لتكن $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فبرهن على أن $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

2. إذا كانت لدينا المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 14 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a. أوجد محددة حاصل ضرب AB أي $|AB|$.

b. أوجد المحددات $|A|$ ، $|B|$.

c. برهن على صحة أو عدم صحة مايلي : $|AB| = |A|\,|B|$.

3. لتكن لدينا المصفوفات التالية :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تحقق من صحة العلاقة التالية : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. أوجد المحدد للمصفوفات التالية باستخدام صف أو عمود بإختيارك

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{bmatrix} \;,\; C = \begin{bmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{bmatrix}$$