Ch. 1 / Linear Programming Model نموذج البرمجة الخطية

تعريف البرمجة الخطية LP
اسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع امثل نتيجة ممكنة.

الغاية من تطبيق اسلوب البرمجة الخطية هي الوصول الى حل نموذج البرمجة الخطية وهي اداة لايجاد الامثلية (تعظيم او تقليل) دالة الهدف تخضع الى مجموعة من المتباينات والمعادلات تعرف بالقيود .
دالة الهدف: ربما تكون ربح او كلفة او طاقة استعابية او انتاج...
القيود: تكون متطلبات السوق او معدات انتاج او طاقة خزن او توفير المواد الاولية ....
يمكن تعريف نموذج البرمجة الخطية LPM
هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة الى دالة الهدف

Elements of a LP model عناصر نموذج البرمجة الخطية

1- Objective (goal) الهدف وتحقيق الامثلية
2- Decision variables متغيرات القرار المطلوب منا تحديد قيمه عند حل النموذج
3- Constraints القيود المطلوب تنفيذها
4- Non negative constraint الشرط اللاسالب

Formulation the general LP model صياغة نموذج البرمجة الخطية

لتكن $x_1,\dots,x_n$ متغيرات القرار التي تعظم او تقلل قيمة دالة الهدف Z

Max. or Min. $Z= C_1 X_1 +C_2 X_2 +\cdots+ C_n X_n$
Subject to:
$a_{11} X_1+ a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n \ (\le , = , \ge)\ b_1$
$a_{21} X_1+ a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n \ (\le , = , \ge)\ b_2$
. . . .
$a_{m1} X_1+ a_{m2} X_2 + \cdots + a_{mn} X_n \ (\le , = , \ge)\ b_m$
$X_j \ge 0$, were $j= 1,2,3,\dots,n$

ممكن كتابة النموذج اعلاه بصورة مبسطة كما يلي :

Max. or Min. $Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
Subject to
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ (\le , = , \ge)\ b_i$, $i=1,2,\dots,m$
$X_j \ge 0$, were $j= 1,2,3,\dots,n$
بحيث
C_j: تمثل ربح او كلفة
b_i : تمثل كمية الموارد المحدودة لتحقيق قيد معين من نوع i
a_{ij}: كمية الموارد المطلوبة توفيرها من i لكل وحدة واحدة من النشاط j

Expresse the LP model in canonical form كتابة نموذج البرمجة الخطية بالصيغة القانونية

Max. $Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Subject to

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$, i=1,2,…,m

$X_j \geq 0$, were j= 1,2,3,…,n

1- جميع متغيرات القرار مقيدة بالاشارة
2- جميع القيود من نوع اقل ≤اذا كانت دالة الهدف .Max
3- جميع القيود من نوع اكبر ≥اذا كانت دالة الهدف .Min

Ex1/

معمل ينتج نوعين من المنتوج (الكراسي , المناضد) كمية الخشب المتوفرة هي 400 وحدة من الخشب و450 ساعة عمل , عمل الكرسي الواحد يتطلب 5 وحدات من الخشب و10 ساعة عمل وربحه 45 $ بينما عمل المنضدة الواحدة تتطلب 20 وحدة من الخشب و10 ساعة عمل وربحه 80 $. المطلوب صياغة نموذج رياضي بحيث تحقق اكبر ربح ممكن

Ex2 /

صاحب حرفة بسيط استاجر 5 عمال ماهرين و10 عمال شبه ماهرين لعمل نموذجين , نموذج فاخر (جيد) ونموذج عادي . النموذج الجيد يتطلب ساعتين عمل من قبل العمال الماهرين وساعتين من قبل العمال شبه ماهرين , اما النموذج العادي يتطلب ساعة عمل من قبل العمال الماهرين و3 ساعات من قبل شبه ماهرين وبسبب قوانين نقابة العمال لايزيد عمل الايدي العاملة اكثر من 8 ساعات يوميا ,علما الربح الصافي لنموذج الجيد هو 10 $ وربح نموذج العادي 8 $
صغ نموذج لهذه المشكلة

Ex3/

يتم انتاج اربع منتجات بصورة متتابعة على ماكنتين والجدول التالي يبين الوقت المطلوب لكل وحدة منتجة على الماكنتين مقدرة بالساعة

	النوع1	النوع2	النوع3	النوع4
م1	2	3	4	2
م2	3	2	1	2

اذا علمت التكلفة الكلية لانتاج كل وحدة معتمدة على التكاليف المباشرة لوقت عمل الماكنة وان كلفة عمل م1 تبلغ ب10 دنانير وكلفة عمل م2 تبلغ 15 دينار , عدد الساعات الكلية المخصصة للمنتوجات الاربعة على الماكنتين بلغت 500 و350 ساعة عمل على التوالي . اما سعر البيع الوحدة الواحدة فهو على الترتيب 65, 70 , 55 , 45 دينار صغ المسألة بصورة نموذج برمجة خطية لتعظيم الربح الصافي .

Sol.

Let X_1 تمثل عدد الوحدات للمنتج الاول
X_2 تمثل عدد الوحدات للمنتج الثاني
X_3 تمثل عدد الوحدات للمنتج الثالث
X_4 تمثل عدد الوحدات للمنتج الرابع

الربح الصافي = سعرالبيع – كلفة الانتاج

$C_1 = 65 – (10 \times 2 + 15 \times 3) = 65 – 65 = 0$

$C_2 = 70 – (10 \times 3 + 15 \times 2) = 70 - 60 = 10$

$C_3 = 55 – (10 \times 4 + 15 \times 1) = 55 - 55 = 0$

$C_4 = 45 – (10 \times 2 + 15 \times 2) = 45 - 50 = -5$

$Max.\ Z = 10X_2 - 5X_4$ دالة الهدف تعظيم ارباح المنتوج

s.to:

$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 \le 500$ القيد الاول ساعات عمل المنجات الاربعة على م1

$3X_1 + 2X_2 + 1X_3 + 2X_4 \le 380$ القيد الثاني ساعات عمل المنجات الاربعة على م2

$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$ الشرط اللاسالب

Ex4/

تقوم احدى منشأت وزارة التجارة بوضع خطة استيراد ثلاث انواع من السلع لغرض تسويقها في السوق المحلي علما ان نفقات الشراء والنفقات الاخرى وضحت في الجدول التالي

المبالغ المخصصة	السلعة3	السلعة2	السلعة1	النفقات
مساوية ل اربعين الفا	1	2	2	نفقات تسويق
على الاقل (حد ادنى) ثلاثين الفا	2	1	2	نفقات ادارية
على الاكثر (حد اعلى) مئة الفا	2	2	4	نفقات متنوعة

علما ان سعر الشراء على السلع (8 ,6 , 4) على التوالي , المطلوب تحديد الحجم الامثل للاستيراد والذي يحقق اقل كلفة ممكنة .

Sol.

Let X_1 يمثل عدد الوحدات السلعة 1

X_2 يمثل عدد الوحدات السلعة 2

X_3 يمثل عدد الوحدات السلعة 3

$Min.\ Z = 8X_1 + 6X_2 + 4X_3$ دالة الهدف لتخفيض تكاليف الشراء

s.to:

$2X_1 + 2X_2 + X_3 = 40000$ القيد الاول نفقات التسويق

$2X_1 + X_2 + 2X_3 \ge 30000$ القيد الثاني نفقات ادارية

$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 100000$ القيدالثالث نفقات متنوعة

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$ الشرط اللاسالب

Ex5/

ينتج معمل نوعين من الابواب الزجاجية النوع الاول باطار المنيوم يكلف انتاجه 16 وحدة نقدية ويباع بسعر 18 وحدة نقدية والنوع الثاني بأطار خشبي يكلف انتاجه 9 وحدة نقدية ويباع بسعر 10 وحدة نقدية , الطلب على الابواب الخشبية الاطار هي 10 كحد اعلى ويحتاج كل نوع على قطعة زجاجية واحدة ذات نفس القياس وعدد القطع المتوفرة في المخزن لا تزيد عن 18 قطعة وقت كبس الالمنيوم لكل باب هو 2 ساعة عمل ووقت كبس الخشب لكل باب هو 5 ساعة عمل وقت العمل المسموح هو 60 ساعة عمل كحد اعلى .

اوجد العدد الامثل من انتاج النوعين الذي يحقق اعظم ربح

Sol.

Let X_1 يمثل عدد الوحدات المنتجة من ابواب المنيوم

X_2 يمثل عدد الوحدات المنتجة من الواب الخشبية

$C_1 = 18 - 16 = 2$ الربح النوع الاول = سعر البيع – كلفة الانتاج

$C_2 = 10 - 9 = 1$ الربح النوع الثاني = سعر البيع – كلفة الانتاج

Max. $Z = 2X_1 + X_2$ دالة الهدف لتعظيم الارباح

s.to:

$X_1 + X_2 \le 18$ قيد الاول عدد القطع الزجاجية

$2X_1 + 5X_2 \le 60$ قيد الثاني وقت كبس نوعين من الابواب

$X_2 \le 10$ قيد الثالث طلب على ابواب الخشب

$X_1 , X_2 \ge 0$ الشرط اللاسالب

Solution of Linear Programming problems حل مشاكل البرمجة الخطية

Solution الحل

هو اي حل يمكن الوصول اليه في مجموعة من المعادلات

Feasible solution الحل المقبول (الممكن)

هو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل في الحالة الاولى ,
وهو الحل الذي يحقق كافة القيود والشرط اللاسالب

Solution region منطقة الحل

منطقة مجموعة الحلول المقبولة التي تحقق كافة القيود

Basic solution الحل الاساسي

هو الحل الذي نحصل عليه ل m من المتغيرات الأساسية(S_i)عند جعل المتغيرات الغير أساسية(x_j)تساوي صفر

Degenerate solution حل منحل (مفكك)

هو الحل الذي يكون فيه على الاقل احد المتغيرات الاساسية يساوي صفر

Optimal solution الحل الامثل

هو الحل الذي يمكن اي ايجاده بعد التوصل الى الحل المقبول ,
هو الحل الذي يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف .

يمكن حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام

1- طريقة الرسم البياني Graphical method

تتميز طريقة الرسم البياني لحل مشكلة البرمجة الخطية بالسهولة والوضوح والسرعة , الا اننا لا يمكننا الحصول على الحل بيانيا للمشكلة الا اذا كان هناك متغيران فقط , تعتمد طريقة الرسم البياني على تحديد منطقة نقاط الحلول المقبولة ومن خلال الحلول يمكن نقارن الارباح والايرادات او التكاليف عند هذه الحلول المقارنة ثم اختيار النقطة التي تحقق احسن قيمة لدالة الهدف.

خطوات حل نموذج البرمجة الخطية :

1- كتابة نموذج البرمجة الخطية رياضيا (تحديد دالة الهدف ومتغيرات القرار والقيود)

2- كتابة القيود على شكل معادلات

3- حساب قيم المتغيرات

4- رسم وتحديد منطقة الحل

Max. $Z= 40X_1 + 100X_2$

S.to:

$12X_1 + 6X_2 \leq 3000$

$4X_1 + 10X_2 \leq 2000$

$2X_1 + 3X_2 \leq 900$

$X_1 , X_2 \geq 0$

From (1) $12X_1 + 6X_2 = 3000$

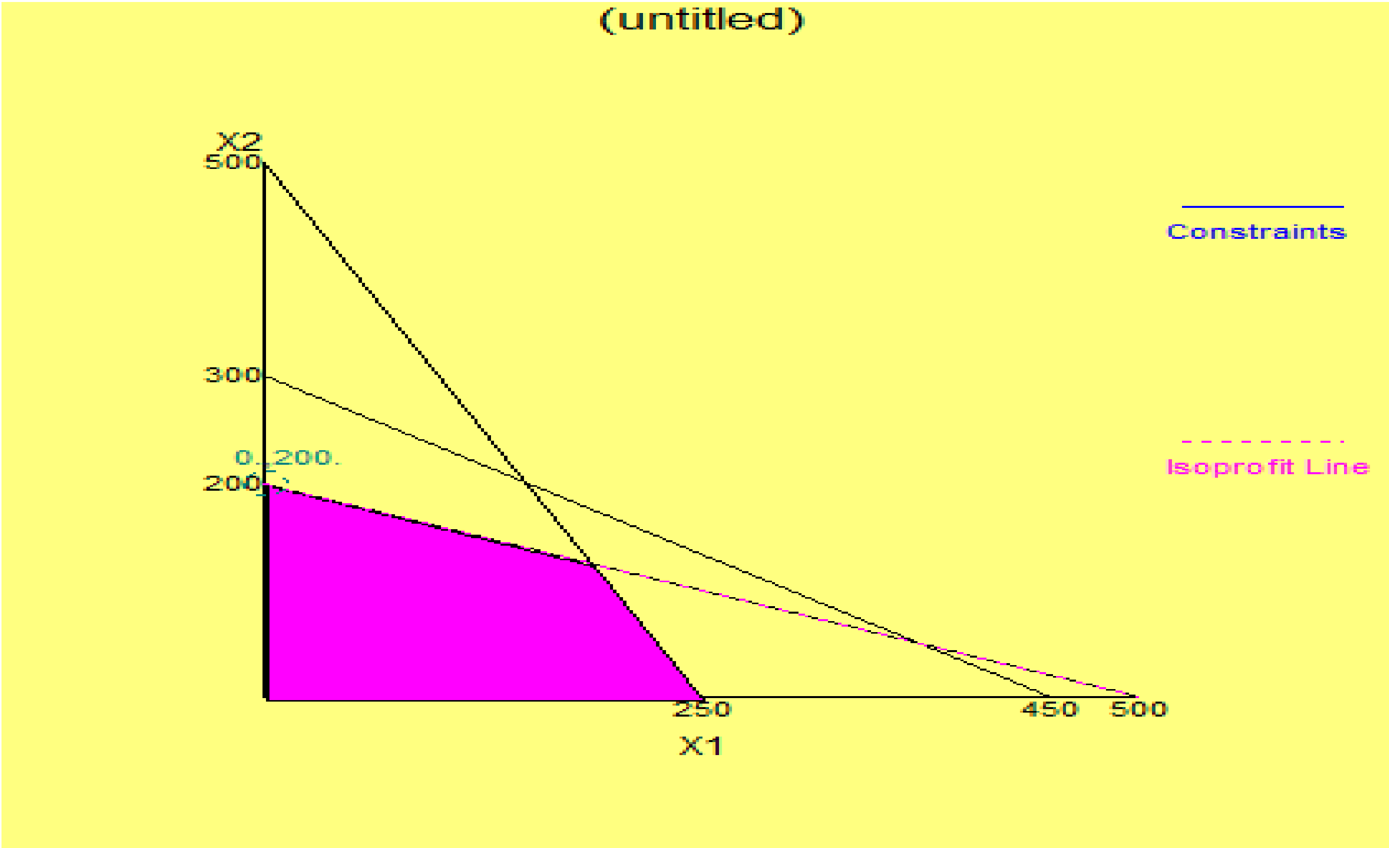
X_1	X_2
0	500
250	0

From (2) $4X_1 + 10X_2 = 2000$

X_1	X_2
0	200
500	0

From (3) $2X_1 + 3X_2 = 900$

X_1	X_2
0	300
450	0



منطقة الملونة هي منطقة حل المقبول و رووسها هي

(0,0), (0,200), a_1 ,(250,0)

a_1 (L_1 , L_2)

$12X_1 + 6X_2 = 3000 \ldots(1)$
$\underline{-12X_1 - 30X_2 = -6000\ldots(2)}$
$-24\ X_2 = -3000 \rightarrow X_2 = \frac{3000}{24} = 125 \rightarrow X_1 = 187.5$
a_1 (187.5,124)

Max. $Z= 40X_1 + 100X_2$
Z(0,0)=0
Z(0,200)= 40(0) + 100(200) =20000 The optimal solution
Z(187.5,125)= 40(187.5) + 100(125) =20000 The optimal solution
Z(250,0)= 40(250) + 100(0)=10000
Then any point between (0,200) and (187.5,125) can be taken as an optimal solution

اي نقطة يمكن ان تؤخذ على انها الحل الامثل
هذا النوع من الحلول يعرف؟

Ex.2

Min. $Z = 6000\ X_1 + 4000\ X_2$

$1000\ X_1 + 3000\ X_2 \geq 24000$

$1000\ X_1 + 1000\ X_2 \geq 16000$

$6000\ X_1 + 2000\ X_2 \geq 48000$

$X_1 \leq 30$

$X2 \leq 30$

From (1)

X_1	X_2
0	8
24	0

From (2)

X_1	X_2
0	16
16	0

From (3)

X_1	X_2
0	24
8	0

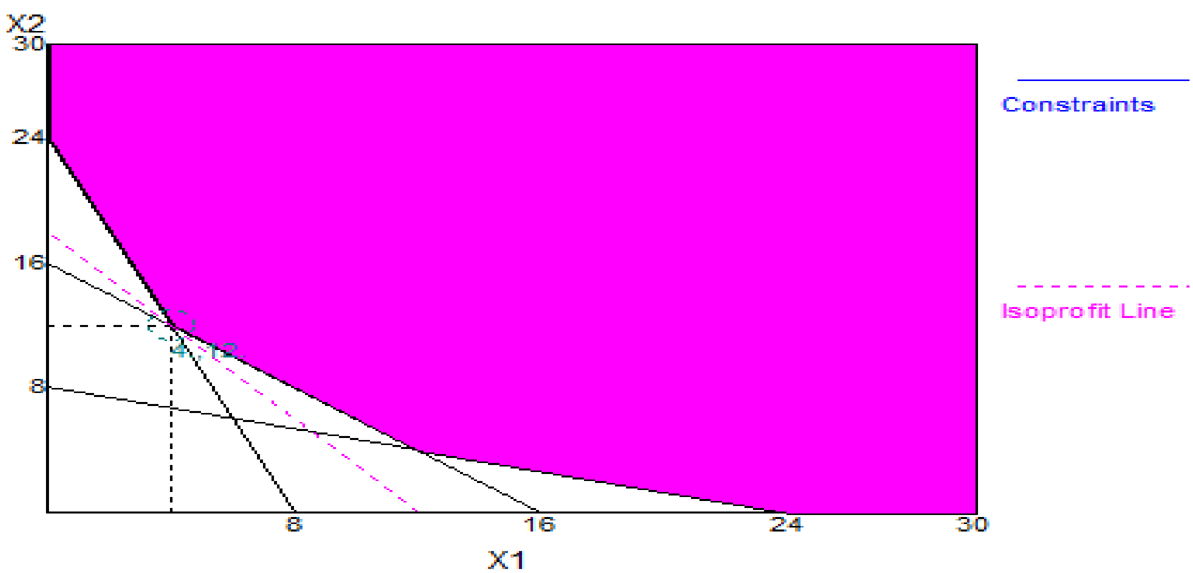
From4 (x_1)رسم خط مستقيم عمودي يقطع محور

$X_1 = 30$

From5 (x_2)رسم خط مستقيم افقي يقطع محور

$X_2 = 30$

(untitled)



منطقة الملونة هي منطقة حل المقبول و رووسها هي

$(30,30),(0,30),(0,24), a_1 , a_2 ,(24,0),(30,0)$

a_1 3 و 2 ناتجة من تقاطع معادلة القيد

$2000 X_1 + 2000 X_2 = 32000 \ldots (2)$

$\underline{-6000 X_1 - 2000 X_2 = -48000} \ldots(3)$

$-4000 X_1 = -16000 \rightarrow X_1 = 4$

$X_2 = \frac{12000}{1000} =12 \rightarrow a_1 (4,12)$

a_2 2و1 ناتجة من تقاطع معادلة القيد

$1000 X_1 + 3000 X_2 = 24000 \ldots(1)$

$\underline{-1000 X_1 - 1000 X_2 = -16000} \ldots (2)$

$2000 X_2 = 8000 \rightarrow X_2 = 4$

$X_1 = 12 \rightarrow a_2 (12,4)$

Solution region

Min. $Z = 6000 X_1 + 4000 X_2$

$Z(24,0)= 6000(24) +4000(0) =144000$

$Z(0,24)= 6000(0) + 4000(24)=96000$

$Z(30,0)=6000(30) +4000(0)=180000$

$Z(0,30)=6000(0) +4000(30)=120000$

$Z(12,4)=6000(12)+4000(4)=88000$

$Z(4,12)=6000(4)+4000(12)=$72000 the optimal solution

$Z(30,30)=6000(30)+4000(30)=300000$

Ex.3

Max. $Z= 2 X_1 + 3 X$

$X_1 + 2 X_2 \leq 10$

$X_1 + X_2 \leq 6$

$X_1 - 2X_2 \leq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$

From (1)

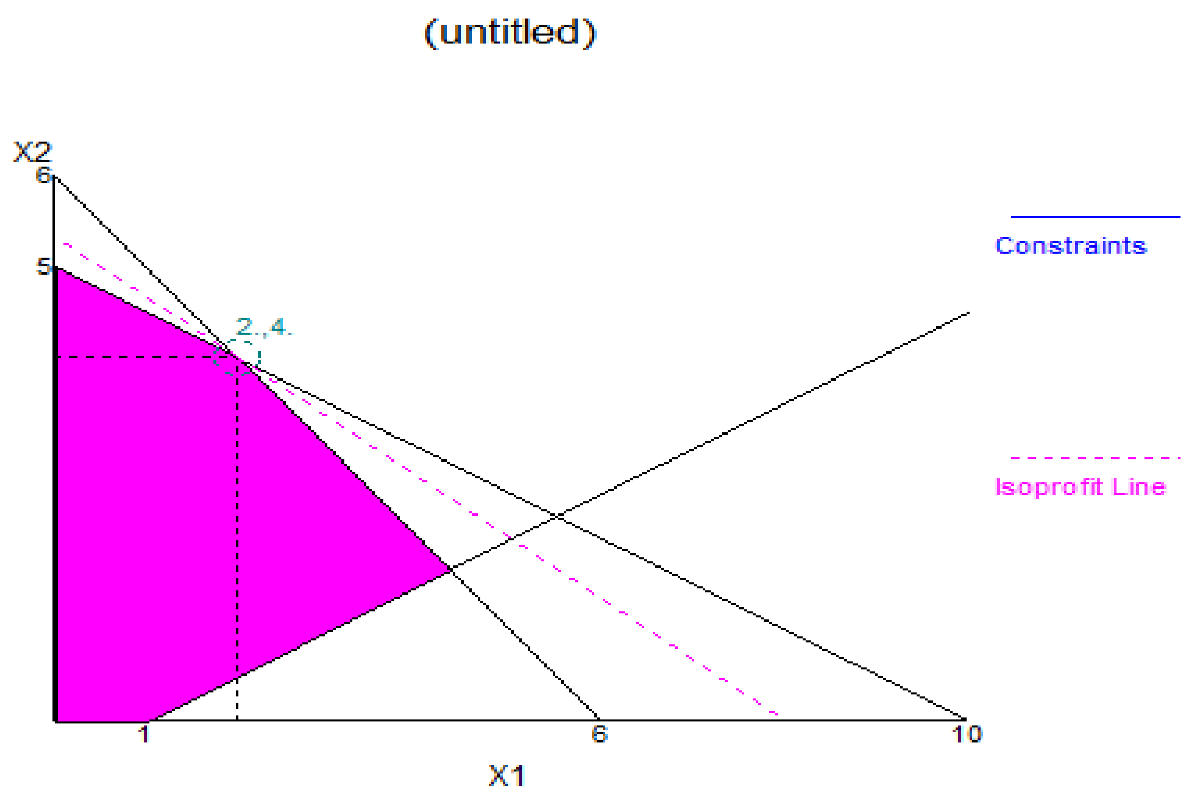
X_1	X_2
0	5
10	0

From (2)

X_1	X_2
0	6
6	0

From (3)

X_1	X_2
0	$\frac{-1}{2}$
1	0



منطقة الملونة هي منطقة حل المقبول و رووسها هي

(0,5), a_1 , a_2 ,(1,0) ,(0,0)

a_1 ناتجة من تقاطع معادلة القيد 1و2

$X_1 + 2\ X_2 = 10$ …(1)
$\underline{-X_1 - \quad X_2 = -\ 6}$ …(2)
$X_2 = 4 \rightarrow X_1 = 2 \rightarrow (2,4)$

ناتجة من تقاطع معادلة القيد 2و3 a_2

$X_1 + X_2 = 6$ …(2)

$\underline{-X_1 + 2X_2 = -1}$…(3)

$3X_2 = 5 \rightarrow X_2 = \frac{5}{3} \rightarrow X_2 = 1.67$

$X_1 = 4.33 \rightarrow a_2\,(4.33\ ,1.67)$

Solution region

Max. $Z = 2X_1 + 3X_2$

$Z(0,0)=2(0)+3(0)=0$

$Z(0,5)=2(0)+3(5)=15$

$Z(1,0)=2(1)+3(0)=2$

$Z(2,4)=2(2)+3(4)=$ 16 the optimal solution

$Z(4.33\ ,1.67) = 2\,(4.33) + 3(1.67) = 13.67$

الحالات الاستثنائية في البرمجة الخطية في حالة حل النموذج بيانيا :

1– التفكك او التفسخ Degenerated Solution

احد القيود لا يؤثر على الحل او عندما يكون احد متغيرات الاساسية قيم $xj=0$

2- وجود أكثر من حل بديل Alternative Solution

تكرار في قيمة المثلى لدالة الهدف

3– لا توجد منطقة حل مقبول Infeasible Solution

لاتوجد منطقة حل مشتركة لكل القيود

4- منطقة حل غير محددة Unbounded Space Solution

تكون منطقة الحل غير محددة ومفتوحة

Slack, Surplus, and Unrestricted Variables متغيرات الركود , الفائضة و غير مقيدة بالاشارة

-Slack variable (S)

- اذا كانت اشارة القيد اقل اويساوي فيضاف الى الطرف الايسر متغير راكد (وهمي) يمثل الكمية الغير مستخدمة من المواد الاولية المتوفرة

اقصى كمية يمكن توفيرها ≤ كمية المواد الاولية المستخدمة في الفعاليات المختلفة

Ex.1/ $X_1 + 4X_2 \leq 8$

$X_1 + 4X_2 + S_1 = 8$, $S_1 \geq 0$

-Surplus variable (S)

- اذا كانت اشارة القيد اكبر او يساوي نطرح من الطرف الايسر متغير فائض يمثل الزيادة في الطرف الايسر عن الحد الادنى من المتطلبات

ادنى كمية يمكن توفيرها ≥كمية المواد الاولية المستخدمة في الفعاليات المختلفة

Ex.2/ $-4X_1 + 2X_2 \geq 20$

$-4X_1 + 2X_2 - S_2 = 20$, $S_2 \geq 0$

-Unrestricted Variables

- اذا احد المتغيرات غير مقيد بالاشارة في الشرط اللاسالب

$X_2 \geq 0$, X_1 unrestricted

Let $X_1 = X'_1 - X''_1$ where $X'_1, X''_1 \geq 0$

مثال فقط لتوضيح

عندما يكون احد المتغيرات غير مقيد بالإشارة

ليكن $X_1 = -5$

نفرض $X'_1 = 0$ and $X''_1 = 5$, where $X'_1, X''_1 \geq 0$

$\rightarrow X_1 = X'_1 - X''_1 \rightarrow X_1 = 0 - 5 = -5$

او

ليكن $X_1 = 3$

نفرض $X'_1 = 3$ and $X''_1 = 0$, where $X'_1, X''_1 \geq 0$

$\rightarrow X_1 = X'_1 - X''_1 \rightarrow X_1 = 3 - 0 = 3$

The Standard form of Linear Programming model الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية

من شروط الصيغة القياسية هي

1- كتابة القيود باستثناء الشرط اللاسالب على شكل معادلات

2- الكمية المتوفرة بالطرف الأيمن b_i (اكبر او يساوي صفر) (non negative)

3- متغيرات القرار مقيدة بالاشارة

4- دالة الهدف تكون اما من نوع تعظيم او تصغير(.Max. or Min)

Ex.1 / express the canonical LP model in the standard form.

Max. $Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Subject to

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$, $i=1,2,\ldots,m$

$X_j \geq 0$, were $j= 1,2,3,\ldots,n$

Sol.

Max. $Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Subject to

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + S_i = b_i$, $i=1,2,\ldots,m$

$X_j \geq 0$, were $j= 1,2,3,\ldots,n$

$S_i \geq 0$, were $i = 1,2,3,\ldots,m$

Ex.2/ express the following LP model in standard form

Max. $Z=2X_1 + 3X_2 + 5X_3$

s.to:

$(X_1 + X_2 - X_3 \geq -5) \times -1 \rightarrow -X_1 - X_2 + X_3 \leq 5$

$-6X_1 + 7X_2 - 9X_3 \leq 4$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 10$

X_1 , $X_2 \geq 0$, and X_3 unrestricted

Sol.

Let $X_3 = X'_3 - X''_3$ where $X'_3, X''_3 \geq 0$

Max. $Z = 2X_1 + 3X_2 + 5(X'_3 - X''_3)$

s.to:

$-X_1 - X_2 + (X'_3 - X''_3) + S_1 = 5$

$-6X_1 + 7X_2 - 9(X'_3 - X''_3) + S_2 = 4$

$X_1 + X_2 + (X'_3 - X''_3) - S_3 = 10$

X_1 , X_2 , X'_3, $X'' \geq 0$

S_1 , S_2 ,$S_3 \geq 0$

(H.W)

Express the following LP model in standard form

1- Min. $Z = 3X_1 - 2X_2 + X_3$

s.to:

$2X_1 - 3X_2 + X_3 \leq 6$

$4X_1 - 2X_2 \geq 4$

$-8X_1 + 4X_2 + 3X_3 = -8$

X_1 , $X_2 \geq 0$, and X_3 unrestricted

2- Max. $Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

s.to:

$2X_1 - 3X_2 \leq 3$

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 5$

$3X_1 + 2X_3 \leq 2$

X_1 , $X_2 \geq 0$, and X_3 unrestricted

نماذج التخصيص أو التعيين

يعد أسلوب التخصيص واحد من أساليب بحوث العمليات التي تحل بموجبها الكثير من المشاكل في الحياة العملية، وتهدف إلى اختيار أفضل تخصيص يؤدي إلى الوصول إلى الأدنى من التكاليف وفي نفس الوقت تعد من الحالات الخاصة لنماذج النقل.

وان كفاءة التخصيص هي إحدى معايير الإدارة العليا لما لها من أثار على تحقيق أهداف الشركة بأقل التكاليف ولهذا تعتبر مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية التي تتعلق بتحديد أفضل توزيع كتوزيع المدراء على المشاريع أو الباعة على المناطق الجغرافية المحلية أو العقود على المتعهدين أو الأعمال على الآلات أو تخصيص المحامين على الزبائن وغيرها.

I- مفهوم وشروط مشكلة التخصيص:

تعرف مشكلة التخصيص بأنها وسيلة تساهم في تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى العوائد أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن، وتعد مشكلة التخصيص من مشاكل التوزيع السهلة المعالجة والمقيدة في الوقت إذا تعود بساطة استخدامها إلى شروطها التي تقتضي وجود عدد من العمليات (أعمال، أفراد،...) بهدف توزيعها على التسهيلات المتاحة بحيث تخصص عملية واحدة لكل نوع من التسهيلات (الإمكانات المتاحة كالمكائن مثلاً)[1].

إن بساطة استخدامها تعود بالدرجة الرئيسة إلى شروط تطبيقها وهي[2]:

- تساوي عدد الأشخاص مع عدد العمليات أو الوظائف المطلوب إنجازها؛
- الوسيلة المتوفرة (عامل، الآلة) تؤدي عمل واحد، وعدم السماح لها بالقيام بأكثر من ذلك؛
- كلفة انجاز كل مهمة من قبل كل وسيلة من الوسائل معروفة ومحددة مسبقا؛
- تحقق شرط عم السلبية، حيث يفترض عدم وجود قيم سالبة.

إن مجالات تطبيق نموذج التخصيص في الحياة العملية كثيرة ومن أهمها[3]:

- تخصيص المدراء للمشاريع؛
- تخصيص مندوبي البيع إلى المناطق البيعية المختلفة؛
- تخصيص الأعمال للمكائن أو الخطوط الإنتاجية؛
- تخصيص المحاسبين للشركات في مكاتب التدقيق والمحاسبة؛
- توزيع العقود على المتعهدين أو المقاولين؛
- تخصيص وسائل نقل معينة لنقل السلع من مكان لأخر.

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 12.

[2]. منعم زمزير الموسوي، مرجع سابق، ص 269.

[3]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، ص 281.

وهناك تطبيقات أخرى كثيرة لهذا الأسلوب منشورة في المجلات المتخصصة في بحوث العمليات ثم تقديم حلول لبعض المشاكل المستعصية من خلالها.

II- طرق حل مشاكل التخصيص (التعيين):

هناك طريقتان رئيسيتان لحل مشاكل التخصيص وهما:

- ✓ طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل)؛
- ✓ طريقة الحل المباشر (المختصر) أو الطريقة الهنكارية.

II-1- طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل):

تعتبر هذه الطريقة من ابسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص وتعتمد على تعداد جميع بدائل التخصيص المحتملة ثم نختار التخصيص الذي يعطي اقل تكاليف خدمة ممكنة.

إن عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي العاملي (Factorial) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، فإذا كان عدد الصفوف يساوي 3 مثلاً فإن: (3!= 3x2x1=6) أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص.

مثال رقم (01): يقوم معمل للخياطة بعمليتين هما التفصيل والخياطة ،فإذا كانت البيانات التالية تمثل الوقت المستغرق للأداء في القسمين من قبل عاملين كالأتي :

المهام	*الوقت المستغرق / بالدقائق*	
العاملون	*تفصيل*	*خياطة*
خالد	6	5
علي	8	10

المطلوب : تخصيص كل عامل للقيام مهمة معينة، بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم لإنجاز تلك المهام.

الحل: إن الاحتمالين الخاصين بتحقيق الهدف هما (2!= 2x1=2) ويمكن تمثيل هذين الاحتمالين كالآتي:

التكلفة بالدقائق	*العاملون*		*الاحتمالات*
	خياطة	*تفصيل*	
6+10=16	علي	خالد	*الأول*
8+5=13	خالد	علي	*الثاني*

إذن يعتبر البديل الثاني هو الأفضل لإنجاز المهمتين بأقل التكاليف.

مثال رقم (02): إذا توفر لدينا ثلاثة أجهزة لإنجاز ثلاثة وظائف مختلفة وأعطيت لنا المعلومات الواردة في الجدول الآتي عن تكاليف إنجاز هذه الوظائف على هذه الأجهزة المطلوب استخدام طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تخصيص لتقليل التكاليف:

الأجهزة	الوظائف		
	1	2	3
A	19	11	17
B	13	7	11
C	11	5	13

الحل: تجري عملية التخصيص على وفق طريقة التوافيق المختلفة وذلك بتسجيل جميع البدائل الممكنة مع التكاليف المقابلة لكل بديل، بما ان عدد الصفوف يساوي (3) فإن: (3!= 3x2x1=6) أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص.

البدائل	الأجهزة			التكاليف الإجمالية
	A	B	C	
الأول	1	2	3	19+7+13=39
الثاني	1	3	2	19+5+11=35
الثالث	2	1	3	11+13+13=37
الرابع	2	3	1	11+11+11=33
الخامس	3	1	2	17+13+5=35
السادس	3	2	1	17+7+11=35

اقل كلفة إجمالية

يتضح من الجدول أعلاه أن جميع البدائل قد تم حسابها وأن البديل الأفضل هو الرابع أي أن يخصص الجهاز (A) لإنجاز الوظيفة الثانية و الجهاز (B) للوظيفة الثالثة والجهاز (C) للوظيفة الأولى لأن هذا الترتيب سيجعل من الكلفة الإجمالية (33 وحدة نقدية).

إن من أبرز عيوب طريقة التوافيق المختلفة أنها تستخدم فقط لإيجاد الحل الأمثل في حالة المسائل ذات المتغيرات قليلة العدد فتصبح غير كفؤة في حالة المسائل الكبيرة ذات المتغيرات الأربعة وما فوق، لهذا السبب تم تطوير أسلوب أكثر كفاءة في إيجاد الحل الأمثل على يد الرياضي المجري (د.كوينج) الذي بني نموذجها وعرفت بالطريقة الهنكارية والتي تتميز بقدرتها على التعامل مع المشاكل ذات المتغيرات الكثيرة.[1]

II-2- طريقة الحل المباشر (المختصرة) أو الطريقة الهنكارية:

تعتمد إجراءات الحل وفق هذه الطريقة على ما يسمى (المصفوفة المتناقصة)، والتي تستلزم طرح وإضافة أرقام ملائمة من هذه المصفوفة، ومن خلالها نستطيع أن نحقق الحل الأمثل، وتعتمد خطوات الوصول إلى الحل الأمثل على هدف مشكلة التخصيص حيث تختلف تلك الخطوات في حالة الوصول إلى أدنى كلفة عما هي عليه في حالة الوصول إلى أقصى الإيرادات.هناك شرطين ينبغي تحقيقهما وهما:

- **الشرط الأول:** تحقيق صفر واحد في كل صف وصفر وحدا على الأقل في كل عمود؛

[1]. اكرم محمد عرفان المهتدي؛ مرجع سابق، ص 161.

- **الشرط الثاني:** سحب المستقيمات على الأصفار بمعنى تغطية الأصفار بمستقيمات، ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى أقل عدد من الأصفار ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوياً لعدد الصفوف والأعمدة.

أولا : تحقيق أدنى كلفة

وتتميز هذه الطريقة بأنها تتكون من عدد من الخطوات المتسلسلة التي تكفل الوصول إلى الحل الأمثل، وهذه الخطوات لمشاكل التخفيض هي[1]:

1. ترتيب المعلومات في مصفوفة؛
2. التأكد من موازنة المصفوفة (عدد الصفوف يساوي عدد الأسطر)؛
3. نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي قيم ذلك الصف في المصفوفة؛
4. نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود في المصفوفة، ولابد من تحقيق صفر واحد على الأقل في كل عمود وفي كل صف وهو الشرط الأول؛
5. تغطية الأصفار بمستقيمات ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى الأقل، ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة وهذا يمثل الشرط الثاني؛ ونكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل؛ ونقوم بعملية التعين أو التخصيص وذلك بأن نأخذ الأصفار الواقعة على نقاط التقاء الصفوف والأعمدة ونجري التعيينات على أساس واحد إلى واحد والقصد من أخذ الأصفار في هذه الحالة، هو لأنها تمثل أصلاً اقل التكاليف؛
6. إذا كان عدد المستقيمات المغطية للأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل، أي أننا لا نستطيع القيام بكافة التعيينات، ومن أجل الاستمرار بالحل فإننا نقوم بتطوير الحل أي طرح أصغر قيمة (باستثناء الصفر) من كل القيم غير المغطاة بمستقيمات من بقية القيم غير المغطاة وفي نفس الوقت إضافة هذه القيمة التي طرحتها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، أما القيم المغطاة فتدرج كما هي في الجدول الجديد وتتم العملية باستمرار إلى أن تحقق الحل الأمثل،
7. وضع سياسة التخصيص ثم حساب مجموع التكاليف.

مثال رقم (03): ترغب إحدى الشركات بتخصيص أربعة أوامر عمل إلى أربعة مجاميع من العاملين بحيث يكون وقت الإنجاز الكلي (بالساعة) اقل ما يمكن علما أن الوقت اللازم لإنجاز كل أمر عمل من قبل كل مجموعة من المجاميع الأربعة موضحة في الجدول أدناه والمطلوب: إجراء عملية التخصيص اللازمة بطريقة الحل المباشر:

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، ص ص: 222 – 223.

أوامر العمل / مجاميع العمل	أمر A	أمر B	أمر C	أمر D
مجموعة 1	5	7	9	10
مجموعة 2	12	8	5	6
مجموعة 3	6	9	11	9
مجموعة 4	7	13	8	6

الحل:

تحديد أصغر قيمة في كل صف وطرحها من بقية القيم الصف:

5	7	9	10
12	8	5	6
6	9	11	9
7	13	8	6

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	2	4	5
7	3	0	1
0	3	5	3
1	7	2	0

تحديد أصغر قيمة في كل عمود وطرحها من بقية القيم العمود:

0	2	4	5
7	3	0	1
0	3	5	3
1	7	2	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	0	4	5
7	1	0	1
0	1	5	3
1	5	2	0

الآن نجد أن هناك على الأقل صفر واحد في كل صف وكل عمود وعليه الشرط الأول محقق، يمكن اختبار الحل بتغطية هذه الأصفار بمستقيمات، هنا يمكن تغطية الاصفار جميعها بأربعة مستقيمات مبتدئين أولا بالصف الأول (صفرين) ثم العمود الأول (صفرين) ثم الصف الثاني والصف الرابع كما في الآتي:

	2			
	0	0	4	5	1
3	7	1	0	1
	0	1	5	3
	1	5	2	0	4

إذن تحقق الشرط الثاني عدد المستقيمات تساوي عدد الأعمدة أو الصفوف أي تحقق الحل الأمثل ومنه يمكن الآن إجراء عملية التخصيص وكالآتي:

مجموعة العمل	أمر				أمر العمل	زمن الانجاز
مجموعة 1	~~A~~	B			B	7
مجموعة 2			C		C	5
مجموعة 3	A				A	6
مجموعة 4				D	D	6
مجموع التكاليف						24 ساعة

إن أجراء عملية التخصيص ونبدأ بالصف أو العمود الذي فيه صفر واحد لذا نضع مربع على الموجود في الصف الثاني وهذا يعني تخصيص أمر العمل (C) إلى مجموعة العمل الثانية، وبما أنه لا يوجد صفر أخر في العمود (C) فإننا ننتقل إلى الصف الثالث ونضع مربع على الصفر الوحيد فيه ولكن هنا يجب أن نشطب الصفر الموجود في نفس العمود (بالصف الأول) دلالة على أنه لا يمكن تخصيص أمر العمل (A) إلى المجموعة الأولى لأنها قد خصصت للمجموعة الثالثة، ثم ننتقل إلى الصف الرابع ونضع مربع على الصفر الوحيد فيه أي تخصيص أمر العمل (D) إلى المجموعة الرابعة وكذا الأمر مع الصفر الباقي في الصف الأول أي أنه سوف يخصص أمر العمل (B) للمجموعة الأولى ، وإن الوقت الكلي اللازم لانجاز العمل سيكون 24 ساعة.

ثانيا: تحقيق أقصى عائد

لا تختلف خطوات الحل عندما يكون الهدف تحقيق أقصى عائد (إيراد)عن خطوات الحل حينما يكون الهدف تقليل التكاليف، إلا عند البدء بالحل، حيث يتم بموجب هذه الهدف طرح كل القيم (العوائد) في مصفوفة العوائد من أكبر قيمة في المصفوفة كلها فنحصل على مصفوفة تكاليف ومن ثم يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.[1]

مثال رقم (04): مؤسسة تجارية ترغب في تعيين عدد من العمال لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد العمال أربعة وكانت الأرباح الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي:

الوظائف / العمال	1	2	3	4
A	6	15	4	5
B	9	7	6	1
C	5	11	1	7
D	14	18	9	10

المطلوب: إيجاد الحل بطريقة الحل المباشر لمسألة الأرباح.

الحل: لأن المسألة تعظيم الأرباح، لذا يتم طرح جميع الأرقام من أعلى رقم في الجدول وهو (18) لتصبح مسألة التكاليف وإتباع الخطوات السابقة في حالة التدنئة:

[1]. فتحي خليل حمدان ، رشيق رفيق مرعي ، مرجع سابق، ص 168.

12	3	14	13
9	11	12	17
13	7	17	11
4	0	9	8

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

12	3	14	13
9	11	12	17
13	7	17	11
4	0	9	8

وتصبح المصفوفة كما يلي:

9	0	11	10
0	2	3	8
6	0	10	4
4	0	9	8

طرح أصغر قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

9	0	11	10
0	2	3	8
6	0	10	4
4	0	9	8

وتصبح المصفوفة كما يلي:

9	0	8	6
0	2	0	4
6	0	7	0
4	0	6	4

نغطي كل صف و كل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات:

9	0	8	6
0	2	0	4
6	0	7	0
4	0	6	4

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (4) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

5	0	4	2
0	6	0	4
6	4	7	0
0	0	2	0

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

العمال	الوظائف				الوظيفة	الربح
A		2			2	15
B	~~1~~		3		3	6
C				4	4	7
D	1	~~2~~		~~4~~	1	14
مجموع الأرباح						42

III- حالات خاصة في مشاكل التخصيص:

هناك عدد من الحالات الخاصة في مشاكل التخصيص وهي:

III-1- عدم تساوي الصفوف والأعمدة:

لا يتحققا أحيانا شرط أساسي من شروط التخصيص وهو ضروري تساوي الصفوف والأعمدة، لذلك يتم اللجوء في هذه الحالة إلى إضافة صف أو عمود وهمي إلى جهة النقص بقيمة الصفر سواء أكان الهدف تخفيض أدنى كلفة أو أقصى عائد.

مثال رقم (05): تنوي شركة مقاولات إنشاء أربعة مشاريع إسكانية في أربعة مناطق مختلفة، فإذا كان لدى الشركة ثلاث وسائل لحفر وتسوية هذه الأرضي، فإذا كان تقدير الشركة لتكاليف إنجاز هذه المهام بالآلاف الدنانير هي كما في الجدول التالي:

المشاريع / *الوسائل*	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3	المدينة 4
A	9	12	8	11
B	16	5	18	9
C	7	4	9	20

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف بطريقة الهنكارية

الحل: نلاحظ في هذا المثال بأن عدد الوسائل أقل من المهام وهذا يعني ضرورة استحداث صف وهمي لموازنة مشكلة التخصيص كما يلي:

المشاريع / *الوسائل*	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3	المدينة 4
A	9	12	8	11
B	16	5	18	9
C	7	4	9	20
D وهمي	0	0	0	0

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

9	12	8	11
16	5	18	9
7	4	9	20
0	0	0	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

1	4	0	3
11	0	13	4
3	0	5	16
0	0	0	0

لا يتم طرح أقل قيمة في كل عمود لأنها تساوي صفر، إختبار مثالية الحل بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

1	4	0	3	3
11	0	13	4	
3	0	5	16	
0	0	0	0	1
	2			

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (3) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

	1	7	0	3	4
	8	0	10	1	
2	0	0	2	13	
	0	3	0	0	1
		3			

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

الوسائل	*المشاريع*				*الوظيفة*	*الكلفة*
A			م3		**م3**	8
B		م2			**م2**	5
C	م1	~~م2~~			**م1**	7
D وهمي	~~م1~~		~~م3~~	م4	**م4**	0
مجموع التكاليف						20

III-2- تعدد الحلول المثلى:

قد تكون هناك بعض المشاكل التي ينجم عن حلها وجد أكثر من حل أمثل واحد أي أكثر من حل بديل له نفس الكلفة الكلية وهذا يعني مرونة عالية لدى متخذ القرار للإختيار والمناورة بالموارد المتاحة، وتحصل هذه الحالة عندما يكون بالإمكان تأشير أكثر من قيمة صفرية في نفس الوقت أو بعبارة أخرى تخصيص أكثر من وسيلة لمهمة واحدة .

مثال رقم (06): حل مشكلة التخصيص التالية بحيث تكون الكلفة الكلية أقل ما يمكن (التكاليف بالآلف الوحدات النقدية) بطريقة الهنكارية .

الوسائل / *المهمات*	**1**	**2**	**3**	**4**
A	10	15	16	18
B	14	13	16	10
C	11	9	8	18
D	13	13	11	9

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف بطريقة الهنكارية

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

10	15	16	18
14	13	16	10
11	9	8	18
13	13	11	9

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	5	6	8
4	3	6	0
3	1	0	10
4	4	2	0

طرح أصغر قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

0	5	6	8
4	3	6	0
3	1	0	10
4	4	2	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	4	6	8
4	2	6	0
3	0	0	10
4	3	2	0

نغطي كل صف و كل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات:

0	4	6	8
4	2	6	0
3	0	0	10
4	3	2	0

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (2) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة لتقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

0	4	6	10	4
1	2	0	4	0
3	0	0	12	2
3	2	1	0	0

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن القيام بسياسة التخصيص كالآتي:

الوسائل	المهمات				*الحل الأمثل الأول*	*الكلفة*	*الحل الأمثل البديل*	*الكلفة*
A	1				**1**	10	**1**	10
B		2		4	**2**	13	**4**	10
C		2	3		**3**	8	**2**	9
D			3	4	**4**	9	**3**	11
مجموع التكاليف						40		40

يتم اختيار أحد البدائل الاثنين ، إذا أن مجموع التكاليف للبدلين متساوي وهو **(40)**.

نماذج النقل

تظهر مشكلات النقل في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثيراً ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عددية لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة.

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من إستخدامها هو إيجاد أسلوب امثل لتوزيع الوحدات أو المنتوجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ، مراكز تسويقية) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل كلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت، ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبليكس في البرمجة الخطية إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة مفردات (متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل وهذه المفردات.

لقد وضعت الصيغة الأولى لطريقة النقل من قبل العالم هيتشكوك (Hitchcok) في سنة 1941، ثم أضاف إليها العالم كوبمانز (Koopmans) بعد ذلك حتى وصلت إلى صيغتها المعروفة في إطار البرمجة الخطية بواسطة العالم دانتزج سنة 1953 [1].

I- الإطار العام لمشكلة النقل:

تمثل الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل الأمثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل، والصيغة الجدولية لمشكلة النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها (M) تمثل المصادر (مراكز التوزيع) وعدد أعمدتها (N) وتمثل مراكز الاستلام وهو يظهر كما يلي[2]:

[1]. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص 121.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " **مدخل إلى بحوث العمليات**"، دار مجدلاوي، عمان، 2007. ص: 281.

المراكز / المصادر	N_1	N_2	-.-.-.	N_n	العرض
M_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}		C_{1n} x_{1n}	a_1
M_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}		C_{2n} x_{2n}	a_2
⋮					
M_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}		C_{mn} x_{mn}	a_m
الطلب	b_1	b_2		b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

حيث أن:

$(N_1,N_2,\ldots,N_n)$: مواقع الطلب، $(M_1,M_2,\ldots,M_m)$: مصادر العرض؛

C_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى الموقع j؛

x_{ij}: عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j؛

الفرضية الأساسية لحل نموذج النقل هو أن ما معروض في مصادر العرض أي مجموع المعروض يساوي مجموع الطلب في مواقع الطلب أي: $(\sum b_j = \sum a_i)$ وفي هذه الحالة يسمى نموذج النقل بنموذج النقل المتوازن.

II- حل مسألة النقل:

بعد أن يتم إعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل فإن الخطوة اللاحقة هو إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن، وهناك ثلاث طرق تستخدم لهذا الغرض:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛
- الحل بطريقة أقل التكاليف؛
- طريقة فوجل.

وبعد التوصل إلى الحل الأساسي الأولي يجب تدقيق هذا الحل لمعرفة فيما إذا كان هذا الحل امثلاً أم لا، ويتم الاختبار بإحدى الطريقتين:

- طريقة الحجر المتنقل (التخطي) أو القفز على الصخور (المسار المتعرج)؛
- طريقة التوزيع المعدل.

II-1- إيجاد الحل الأساسي الأولي:

يراعى فيه تحقيق التوازن بين المطلوب والمتاح، كما يجب أن يكون عدد مجاهيل القاعدة في هذا الحل المبدئي بعدد الشروط الخطية، أي (M+N-1) ويمكن إيجاد حل مبدئي بعدة طرائق وفقها:

II-1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة، ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال رقم (01): إحدى الشركات لها ثلاثة مخازن في مواقع مختلفة، كما أن لها ثلاث مراكز تسويقية، أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع (بالدينار)، وحجم التخزين في كل مخزون والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها في الجدول أدناه:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	العرض
A	31 **300**	21 **100**	42	**400**
B	20	21 **800**	30 **200**	**1000**
C	23	20	15 **600**	**600**
الطلب	**300**	**900**	**800**	**2000 /2000**

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة التوازن (مجموع العرض= مجموع الطلب) وهو شرط محقق أي: (2000=2000)، ننقل (300) وحدة من (A) إلى المركز (D_1) وبالتالي تلبية كافة احتياجات المركز (D_1) ويبقى في مخزن (A) 100 وحدة؛

ننقل (100) وحدة من (A) إلى المركز (D_2)، ولم يبقى في مخزن (A) أية وحدة وهناك (800) وحدة يمكن للمركز (D_2) استيعابهم ؛

ننقل (800) وحدة من مخزون (B) إلى المركز(D_2) وبالتالي تلبية كافة احتياجات (D_2) وبقي في مخزون (200) وحدة؛

ننقل (200) وحدة من مخزون (B) إلى المركز(D_3) وبالتالي لم يبق في مخزون (B) أية وحدة؛

ننقل (600) وحدة من مخزون (C) إلى المركز(D_3) وعليه أصبحت حاجة المركز (D_3) صفراً ولم يبقى في مخزون (C) أية وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت، ويجب أن يتحقق الشرط الآتي، وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يساوي 5.

عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1

= 3+3 − 1 = 5 وهو ينطبق على المصفوفة أعلاه.

لذلك فإن هذه المشكلة وما سبقها هن من مشاكل من نوع قابلة للحل الأمثل بدون أية إجراءات أضافية ويطلق على هذا النوع من مشاكل النقل التي يتحقق فيها الشرط المذكور وهو (عدد الخلايا المملوءة (المشغولة)=M+N−1)، بأنها مشاكل غير منحلة)، أما المشاكل التي لا يتحقق فيها الشرط أعلاه ستكون من نوع المشاكل المنحلة، وهنا لا يمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النوع الأخير من المشاكل إلا بعد إجراءات إضافية أخرى[1].

الكلفة الكلية للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 300\,(31) + 100\,(21) + 800\,(21) + 200\,(30) + 600\,(15) = 43200$$

II-1-2- الحل بطريقة أقل التكاليف:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ بعين الاعتبار الأقل تكلفة، وحتى نحصل على الحل الأساسي الأولي الممكن بهذه الطريقة علينا في البداية أن نتأكد من أن جدول النقل في حالة توازن ثم نتبع الخطوات التالية[2]:

- نبدأ بتزويد المربع ذا التكلفة الأقل بأكبر ما يمكن من عدد الوحدات من المخزون المقابل لهذا المربع؛
- نتابع ملئ المربعات ذات التكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز التوزيع من المصادر المتوفرة؛
- نحسب التكلفة الإجمالية للمربعات المختلفة.

لتوضيح هذه الطريقة سنعمل على حل مشكلة النقل في المثال التالي:

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 158.

[2]. أكرم محمد عرفان المهندي، مرجع سابق، ص 131.

مثال رقم (02): لتكن مسألة النقل التالية

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية؛
2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية، وماذا تستنتج؟

المصنع \ السوق	الأسواق: الشمالي	الجنوبي	الغربي	العرض
A	7	6	5	**400**
B	4	8	1	**500**
C	2	3	9	**300**
الطلب	**200**	**600**	**400**	**1200 / 1200**

حل المثال:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية؛

لدينا شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي (5) وهو محقق **عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1** = **3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة المقابلة.

أما **الكلفة الكلية** للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 200\,(7) + 200\,(6) + 400\,(8) + 100\,(1) + 300\,(9) = 8600$$

المصنع \ السوق	الأسواق: الشمالي	الجنوبي	الغربي	العرض
A	7 — 200	6 — 200	5	**400**
B	4	8 — 400	1 — 100	**500**
C	2	3	9 — 300	**300**
الطلب	**200**	**600**	**400**	**1200 / 1200**

2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية؛

هنا نبدأ التوزيع من الخالية ذات **أقل كلفة نقل** وإعطائها الأولوية في تسديد وهي هنا (B الغربي) حيث كلفة نقل (1 وحدة نقدية) لـ طن الواحد، وترى أن احتياجات السوق الغربي 400 وحدة والمتاح في المصنع في هو 500 طن لذا سيتم نقل 400 وحدة وإشباع حاجة السوق بالكامل ثم نبحث في الجدول عن أقل كلفة حيث نجد (C الشمالي) هي ذات كلفة أقل من غيرها (2 وحدة نقدية)، لذا ستكون لها الأولية التالية

السوق / المصنع	الأسواق			العرض
	الشمالي	الجنوبي	الغربي	
A	7	6 400	5	**400**
B	4	8 100	1 400	**500**
C	2 200	3 100	9	**300**
الطلب	**200**	**600**	**400**	**1200 / 1200**

بالتوزيع وترى أن احتياجات السوق 200 طن في حين أن المتاح في المصنع (C) هو 300 طن وبهذا يمكن إشباع حاجة السوق بالكامل ثم نرتقي في التكاليف وبنفس الطريقة نواصل الحل.

لدينا شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق **عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة المقابلة.

أما الكلفة الكلية للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 400\,(6) + 100\,(8) + 400\,(1) + 200\,(2) + 100\,(3) = 4300$$

ونرى أن هناك فرقاً كبيراً في الكلفة الكلية التي تم احتسابها عند اعتماد طريقة الزاوية الشمالية الغربية والتي بلغت 8600 وحدة نقدية وهذا راجع إلى أن طريقة اقل كلفة هدفها هو التوزيع على أساس أدنى تكلفة نقل من المصانع إلى الأسواق.

ملاحظة هامة:

1. **في حالة تساوي التكاليف تعطى الأولوية للمربع الذي يحمل أكبر كمية ولأنه يعمل على تخفيض الكلفة الكلية أكثر؛**
2. **تعتبر طريقة أقل التكاليف أكفأ من طريقة الزاوية الشمالية الغربية التي لا تعتمد على أساس علمي في اختيار المتغيرات الأساسية،بينما هذه الطريقة تعتمد في اختيار المتغيرات الأساسية على المتغير الأقل من حيث التكلفة، لهذا تقربنا أكثر إلى الحل الأمثل، على عكس طريقة الزاوية الشمالية الغربية[1].**

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص: 289.

II-1-3- طريقة فوجل:

تعد هذه الطريقة من أفضل الطرق في حل مسائل النقل وغالبا ما تعطى حلاً أمثلا ويمكن أن نجمل خطوات حل مسألة النقل وفقها كالآتي[1]:

1. إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف؛
2. إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل عمود؛
3. تحديد أكبر فرق سواء كان في الصفوف أو الأعمدة؛
4. البحث عن أقل كلفة في الصف أو العمود الذي يقابل أكبر فرق والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق؛
5. إعادة الخطوات السابقة لحين الوصول إلى توزيع كامل للطاقات الإنتاجية وإشباع تام لإحتياجات الأسواق مع مراعاة استبعاد الخلايا التي تشغل.

مثال رقم (03): لتكن مسألة النقل التالية:

السوق / المصنع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	20	22	17	4	**120**
S_2	24	37	9	7	**70**
S_3	32	37	20	15	**50**
الطلب	**60**	**40**	**30**	**110**	**240/240**

المطلوب: حل المسألة بطريقة فوجل.

الحل: إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق:

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص 219.

السوق / المصنع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_1	20	22 **40**	17	4	**120**	(17-4)= **13**
S_2	24	37	9	7	**70**	(9-7)= **2**
S_3	32	37	20	15	**50**	(20-15)= **5**
الطلب	**60**	**40**	**30**	**110**	**240/240**	
الفروق للأعمدة	(24-20)=**4**	(37-22)=**15**	(17-9)=**8**	(7-4)=**3**		

وهنا سوف يحذف العمود الثاني مرحليا وننقص العرض في الصف بنفس الوحدات المخصصة للخلية (40).

السوق / المصنع	D_1	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_1	20	17	**4** **80**	**80**	(17-4)= **13**
S_2	24	9	7	**70**	(9-7)= **2**
S_3	32	20	15	**50**	(20-15)= **5**
الطلب	**60**	**30**	**110**	**200 /200**	
الفروق للأعمدة	(24-20)=**4**	(17-9)=**8**	(7-4)=**3**		

وهنا سوف يتم حذف الصف الأول مرحليا وننقص الطلب في العمود الرابع بنفس الوحدات المخصصة للخلية (80).

المصنع \ السوق	D_1	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_2	24	9 / 30	7	**70**	(9-7)= **2**
S_3	32	20	15	**50**	(20-15)= **5**
الطلب	**60**	**30**	**30**	**120 /120**	
الفروق للأعمدة	(24-32)=**8**	(20-9)=**11**	(15-7)=**8**		

وهنا سوف يتم حذف العمود الثالث مرحليا وننقص العرض في الصف الثاني بنفس الوحدات المخصصة للخلية (30).

المصنع \ السوق	D_1	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_2	24 / 10	7 / 30	**40**	(24-7)= **17**
S_3	32 / 50	15	**50**	(32-15)= **17**
الطلب	**60**	**30**	**90 /90**	
الفروق للأعمدة	(24-32)=**8**	(15-7)=**8**		

وهنا سوف يتم العودة إلى الجدول الأصلي لمشكلة النقل:

المصنع \ السوق	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	20 /	22 / 40	17 /	4 / 80	**120**
S_2	24 / 10	37 /	9 / 30	7 / 30	**70**
S_3	32 / 50	37 /	20 /	15 /	**50**
الطلب	**60**	**40**	**30**	**110**	**240/240**

حساب التكلفة الإجمالية وفقا لهذه الطريقة:

$$Z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij} = 10(24) + 50(32) + 40(22) + 30(9) + 30(7) = 3520$$

وشرط عدد الخلايا المملوءة محقق، أي: 6=1−4+3.

نظرية المباريات *Game Theory*

الجزء التالي مقتبس من كتاب: أساسيات نظرية المباريات تأليف د. زيد تميم البلخي

أهمية نظرية المباريات

ترجــع البدايات الأولى لنظرية المباريات إلى بداية القرن العشرين . ومع ذلك تعتبر نظرية المباريات إحدى الوسائل الحديثة التي تستخدم لاتخاذ القرارات في الحالات والمواقف التي تتميز بوجود الصراع بين الوحدات المتنافسة المستقلة ، ســواء كانــت أفراداً أو تنظيمات ، حيث لا يستطيع متخذ القرار أن يسيطر بشكل كامل على العوامل المؤثرة في النتائج التي يستطيع الحصول عليها من قراره . إن الميزة الأساســية التــي تحدد فيما إذا كان هؤلاء الأفراد (أو تلك التنظيمات) تواجه مبــاراة أو صــراع هــو وجود طرف آخر تتناقض أهدافه ومصالحه مع هؤلاء الأفراد (أو تلــك التنظيمــات) فمثلاً إذا وجدت شركة تحتكر سلعة معينة لا ينافسها فيها أحد فلا ينشأ الــصراع إلا إذا دخلت السوق شركة أخرى تنافس هذه الشركة على نفــس الــسلعة . وتعتبــر نظريــة المباريات أحد أهم طرق الرياضيات التطبيقيــة المــستخدمة لحــل مــسائل الأعمــال والاقتصاد والمسائل العسكرية .

ويتلخص مفهوم نظرية المباريات بوجود لعبة محددة أو مباراة لها هدف نهــائي يسعى من أجله كل لاعب ومن خلال مراحل خاصة يتم اختيارها حسب قوانين المباراة وأسلوبها حيث يحاول كل لاعب في هذه المباراة القيام بأفضل أداء ممكن للحصول على أفضل العوائد . وتكمن الصعوبة هنا في أن كلاً من المتنافسين يرغب بجعــل عوائــده أفضل ما يمكن مع مراعاة ردود فعل الأطراف المنافسة الأخرى .

إن النماذج الأكثر بساطة لمسائل المباريات والمنافسة هي الألعــاب الرياضــية المختلفة وألعاب الشطرنج وورق اللعب والدومينو وغيرها . وهناك شــبه كبيــر بــين المشاركين في مثل هذه الألعاب وبين سلوك المتحاربين لاحتلال موقع معين أو ســلوك

المتنافسين في سوق معينة ، وهذا الشبه أدى إلى تعميم لفظ لعبة أو مباراة بحيث يشمل جميع الأوضاع **الاجتماعية** والاقتصادية والسياسية والعسكرية وغيرها مــن الأوضـــاع التي تتضمن تنافس أو تعاكس مصالح ، كما أدى هذا الشبه إلى بروز المباريات للتعبير عن مجمل الطرائق الرياضية التي تناقش وتحلل هذه المباريات .

يعتبر العالم الفرنسي اميل بوريل Emile Borel أول من طرح الفكــرة ســنة 1921 إلا أن الفضل الأكبر في إرساء أركان هذه النظرية وبرهنة نتائجهــا الأساســية بطرق رياضية وإظهار الإمكانات الهائلة لها في التطبيق فـــي المجــالات الاقتــصادية والإدارية يرجع إلى العالمين جون فون فيومان John von neuman ومورجانــسترن فبعد أن أثبت جون نيومان القانون للنظرية (قانون أقــل الأكبــر Minimax) عــام 1928 ، تعاون مع مورجانسترن في تقديم النظرية كأداة لتحليــل المواقــف التنافــسية المتعارضة في المجالات الاقتصادية والحربية عام 1944 حيث قدما عمــلاً مــشتركاً تمــثل فـــي كـــتاب اســـمه " نظـــرية المباريـــات والســـلوك الاقتصـــادي " (Theory of Games and Economic Behavior) وتكمن أهمية كتابهما هذا فـــي أنه قام بتغطية جيدة للموضوع وبأنه تزامن مع ظهور طريقة السمبلكس على يد العـــالم دانتزج Dantizig التي مكنت من تقديم طريقة ناجحة لحل العديد من المباريات الكبيرة والمعقدة . ومنذ ذلك الحين وحتى وقتنا هذا لم يتوقــف ســيل الإضـــافات والتطـــوير ومحاولات التغلب على مشاكل التطبيق ومن أهم الإضافات التي فتحـــت آفاقــاً جديـــدة للتطبيق ، هي نتائج دراسات ناش (Nash) وشابلي (Shapley) حيث قـــدم الأخيـــر الدالة المعروفة بدالة قيم شابلي ، والتي على أساسها تتحدد عائـــد المباريـــات متعـــددة الأطراف لكل من المشاركين فيها بصور فريدة ، وتعتبر نظرية المباريات وسيلة للنظر في مسائل الصراع الأكثر إثارة في الحاضر والمستقبل . ومع أنهـــا لا تـــضمن تقـــديم الحلول لجميع مسائل الصراع إلا أنها تقدم الوسائل والطرق الأكثـــر فعاليـــة لتحليـــل ودراسة هذه المسائل . وسوف نقدم في هذا الفصل المبادىء الأساسية للنظرية مع شرح بعض مجالات التطبيق .

تعاريف ومفاهيم أساسية :

اللعبة (Game) : هي مجموعة قواعد تحدد ما يجب أو يستطيع أن يفعله اللاعب هذه القواعد تعرّف المعلومات المتوافرة لدى كل لاعب وعدد الخطوات ونهاية المباراة التي يأخذها أو يعطيها أي لاعب .... الخ .

قواعد اللعبة : هي مجموعة من القواعد الموضوعة مسبقاً والتي تحدد جميع التحركات في هذه اللعبة والعوائد المقابلة لها .

المباراة Play : هي تطبيق خاص لقواعد اللعبة يؤدي في النهاية إلى نتيجة معينة . يتم دفع العوائد أو المدفوعات payments التي تأخذ صورة تحقيق هدف معين أو كسب عدد من النقاط ... الخ .

اللاعب player : هو وحدة مستقلة لاتخاذ القرار وليس من الضروري أن يكون اللاعب شخصاً فرداً وإنما قد يكون شركة أو مؤسسة أو فريقاً أو جيشاً أو دولة .

العائد Payoff : لكل لعبة عائد معين يتم التعبير عنه على شكل ربح أو خسارة أو منفعة (utility) وهذا العائد له علاقة بالاستراتيجيات التي يتم اختيارها من كافة اللاعبين .

الخطوة move : هي النقطة التي يتوجب فيها على اللاعب اتخاذ قرار الاختيار (البديل) وهناك نوعين من الخطوة :

1 ـ الخطوة الشخصية Personal move : هي اختيار مدروس وواعي لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب .

2 ـ الخطوة العشوائية Chance move : هي اختيار غير واعي لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب وذلك طبقاً لتوزيع احتمالي معين بواسطة قواعد المباراة .

ونقــول عن المباراة أنها بمعلومات كاملة (Perfect Information) إذا كانت الخطوات شخصية مثل لعبة الشطرنج ونقول عن المباراة أنها بمعلومات غيــر كاملــة (Imperfect Information) إذا كانت الخطوات عشوائية مثل لبعة الدومينو . وبتعبير آخر : تكون المباراة ذات معلومات كاملة إذا كان بمقدور اللاعبين أن يعرفــوا جميــع الخطوات التي وقعت مسبقاً .

الاستراتيجية Strategy : هي مجموعة من السياسات والخطط التــي تــصف تحركات المتنافسين والتي سيقومون بها خلال المباراة . وهي معيــار قــراري تأخــذ بالحسبان مجموعة القواعد التي تحــدد اختيار اللاعب في كل خطــوة يخطوهــا فــي المباراة .

وهناك نوعين من الاستراتيجيات :

1 ـ الاستراتيجية الصرفة أو الخالصة البحتة Pure strategy

وهي الاستراتيجية التي يمارسها اللاعب طوال وقت المباراة أو المعيار القراري الدائم لاختيار نفس طريقة اللعب طوال المباراة .

2 ـ الاستراتيجية المختلطة أو المركبة Mixed strategy

وهي المعيار القراري الذي يحدد التصرف الذي يجب أن يسلكه متخــذ القــرار بالاعتماد على مجموعة محددة من الاحتمالات ، وبكلام آخر هي التوزيــع الاحتمــالي الذي يخصص احتمالات محددة لاختيار كل من الاســتراتيجيات البحتــة حيــث يــتم تخصيص نسبة معينة من المرات (احتمال معين) التي يتم فيها تطبيق كل مــن هــذه الاستراتيجيات بحيث يكون مجموع هذه النسب (مجموع الاحتمالات) مساوياً الواحد .

(2 ـ 2) تصنيف المباريات

تصنيف المباريات عادة إما حسب عدد اللاعبين المشاركين في المباراة أو عدد الاستراتيجيات أو حسب نتيجة المباراة أو حسب طبيعة المباراة .

- فحسب عدد اللاعبين تقسم إلى نوعين :

1 ـ مـباراة ذات شـخصين : أي أن عدد المشاركين (اللاعبين) في المبـاراة اثنان فقط .

2 ـ مباراة متعددة الأطراف : أي أن عدد المشاركين (اللاعبين) في المباراة أكثر من اثنين .

- وحسب الاستراتيجيات تقسم المباريات إلى نوعين أيضاً :

1 ـ مباراة محددة : وهي المباراة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة أمـام كل لاعب محدوداً .

2 ـ مباراة مستمرة (غير محددة) : وهـي المبـاراة التـي يكـون فيهـا عـدد الاستراتيجيات المتاحة أما كل لاعب غير محدود أي لا نهائياً .

- أما حسب نتيجة المباراة فتقسم إلى نوعين أيضاً :

1 ـ مباراة ذات مجموع صفري : وهي المباراة التي يكون فيها ربح اللاعـب الأول يسـاوي تماماً خسـارة اللاعب الآخر أو التي يكون فيها مجموع القيم المتبادلة ثابتاً .

2 ـ مباراة ذات مجموع غير صفري : وهي المباراة التي يكون فيهـا ربـح أحـد اللاعبين لا يسـاوي خسـارة اللاعب الآخـر وإنما يمكن أن يخسر الطـرفين أو يكسبا نتيجة المباراة أو يمكن أن يكسب أحدهما ويخسر الآخر . ويمكـن أن تقوم مثل هذه المباريات على أساس التنافس أوالتعاون بين اللاعبين .

- أما حسب طبيعة المباراة فتقسم إلى نوعين هما :

1 ـ مباريـات غير تعـاونية (Noncooperative) : حيث لا يوجـد أي تنـسيق أو تعاون أو تفاوض بين اللاعبين ويسعى كل لاعب عندها لجعل عوائده أكبـر ما يمكن .

2 مباريـــات تعـــاونية (Cooperative) : حيث يمكن أن يوجد تنسيق أو تعاون أو تفاوض بين اللاعبين يؤول إلى زيادة العوائد الكلية أو العوائد المتوقعة لكـــل منهم .

المثال البسيط التالي يعطي فكرة عن بعض المصطلحات الواردة أعلاه :

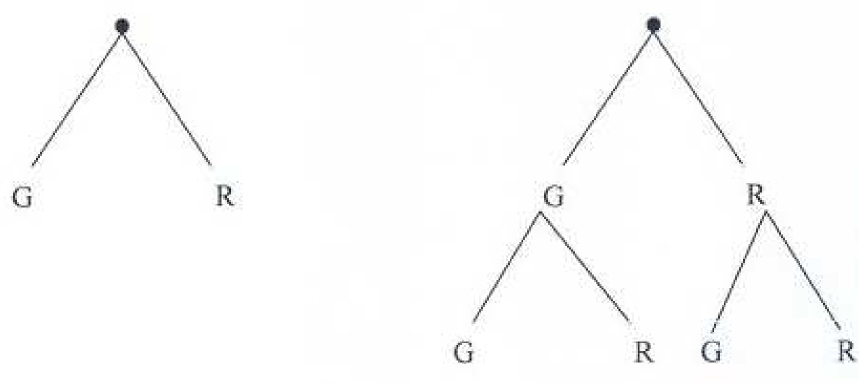
مثال (1 ــ 1) يتبارى شخصان (لاعبان) في اللعبة التالية :

يقوم اللاعب الأول باختيار أحد اللونين أخضر أو أحمر ودون يعلن عن اختياره ، ثم يقوم اللاعب الثاني باختيار أحد اللونين أخضر (G) أو أحمر (R) لكنه لا يعلن عن اختياره (يبقى صامتاً) . يعود بعدها اللاعب الأول إلى اختيار أحد اللونين أخضر أو أحمر فإذا كانت الخيارات متطابقة الألوان فإن اللاعب الأول يربح 1 $ من اللاعب الثاني و إلا فإن اللاعب الثاني يربح 1 $ من اللاعب الأول .

نلاحظ أن هذه اللعبة هي لعبة ذات شخصين وذات مجموع صفري Two Zero-sum Game إذ أن ما يربحه أحد اللاعبين يساوي تماماً ما يخسره اللاعب الآخر . كما نلاحظ أنه قد تم تحديد قواعد اللعبة ، وسوف نقوم بدراسة وتحليل هذه المباراة من خلال تحديد كلاً مما يلي .

الاستراتيجيات :

نلاحظ أن اللاعب الأول يلعب على مرحلتين يختار في المرحلة الأولى G أو R ويختار في المرحلة الثانية كذلك G أو R . أما اللاعب الثاني فيلعب مرحلة واحدة يختار فيها G أو R . ويمكن تمثيل اختيارات اللاعبين كما في الشكل (1 ــ 1) .



اختيار اللاعب I   اختيار اللاعب II

شكل (1 ــ 1)

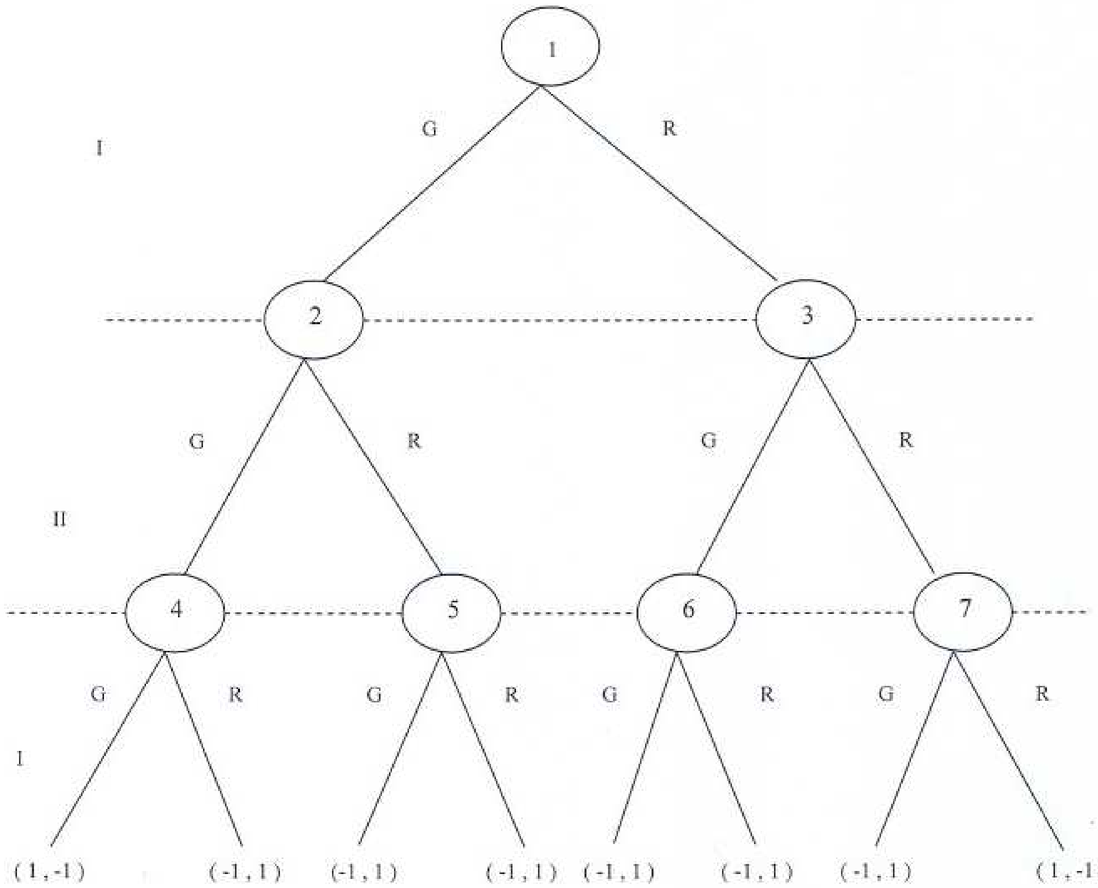
نقول في هذه الحالة إن الاستراتيجيات الممكنة للاعب I هي :

$$(G , G) , (G , R) , (R , G) , (R , R)$$

وسنرمز لها بالرموز I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 على الترتيب ، أما استراتيجيات اللاعب II فهي R , G وسنرمز لها بالرمزين II_1 ، II_2 على الترتيب .

شجرة المباراة (Tree of the Game) :

هي شجرة تشبه شجرة القرار ونضع فيها جميع اختيارات اللاعب الذي يبدأ اللعب في المرحلة الأولى (وسنسميه اللاعب الأول) ومقابل كل من هذه الخيارات نضع اختيارات اللاعب الآخر للمرحلة الأولى ومقابل هذه الخيارات الأخيرة نضع كل الخيارات للاعب الأول (الذي بدأ اللعبة) للمرحلة الثانية إن وجدت وهكذا ... فنحصل على شكل أشبه بالشجرة ثم نضع مقابل كل فرع نهائي لهذه الشجرة عوائد اللاعبين على الشكل (a, b) بحيث أن **a** هي عوائد اللاعب الأول و b عوائد اللاعب الثاني . وفي حال مباريات الشخصين ذات المجموع الصفري فإن $a + b = 0$ (وبالتالي $b = -a$) فمثلاً شجرة المباراة للمثال (1 ــ 1) هي كما في الشكل (1 ــ 2) .



شكل (1 ــ 2) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 1)

مصفوفة المباراة Matrix of Game

إذا كان عدد استراتيجيات اللاعب I هي m وعدد استراتيجيات اللاعب الثـاني هي n [في مثـال (1 ــ 1) لدينا $m = 4$ و $n = 2$] فـإننا نشـكل مصفوفة من m سـطر و n عمـود نضع فيها العـوائد المقابلة للاستراتيجيات (I_i , II_j) حيث $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ ونسميها مصفوفة المباراة .

ففي مثالنا (1 ــ 1) أعلاه فإن مصفوفة المباراة هي (راجع شجرة المباراة).

$$
\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
(1,-1) & (-1,1) \\
(-1,1) & (-1,1) \\
(-1,1) & (-1,1) \\
(-1,1) & (1,-1)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

وفي حال مباريات الشخصين ذات المجموع الصفري كما في المثال (1 ــ 1) أعلاه فإن النتيجة (a, b) تعني أن b = -a ولذا فقد اصطلح على كتابة النتيجة (a, -a) على الشكل a أي العوائد العائدة للاعب I فقط أما عوائد اللاعب الثاني II فهي معروفة ضمناً . وبذلك فإن المصفوفة أعلاه تكتب على النحو التالي :

$$
\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & -1 \\
-1 & -1 \\
-1 & -1 \\
-1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

لاحظ أنه يمكننا جعل هذه المباراة ذات مجموع ثابت a مثلاً وذلك بإضـــافة $\frac{a}{2}$ لعوائد كل من اللاعبين . فلو أضفنا 3 لعوائد كل من اللاعبين لكان مجموع العائد فـــي كل عناصر مصفوفة المباراة مساوياً 6 ومن هنا يقال عن المباريـــات ذات المجمـــوع الصفري أنها ذات مجموع ثابت أيضاً

وكمثال على مباريات لشخصين ذات مجموع غير صفري نسوق المثال البسيط التالي :

مثال (1 ــ 2)

قامت الشرطة بتوقيف شخصين بتهمة سرقة أحد محلات المجوهرات في السوق معاً وقد تم استجواب كل من الشخصين على حدة . ونظراً لسوابق هـذين الشخـصين فإنهما يعلمان أنه إذا لم يعترف أحدهما بشيء ، فلا يوجد دلائل كافيـة عليـه لاثبـات تورطه في السرقة وعندئذٍ سيتم الحكم عليـه بـسجن سـنة . وإذا اعتـرف كلاهمـا باشتراكهما بالسرقة فإنه سيتم الحكم على كل منهما بالسجن لــ 9 سـنوات . أمـا إذا اعترف أحدهما بالسرقة ولم يعترف الآخر فسيتم الحكـم على المعترف بالسجن لمـدة 10 سنوات وسيتم إطلاق سراح الآخر . المطلوب تحليل هذه اللعبة (المباراة) .

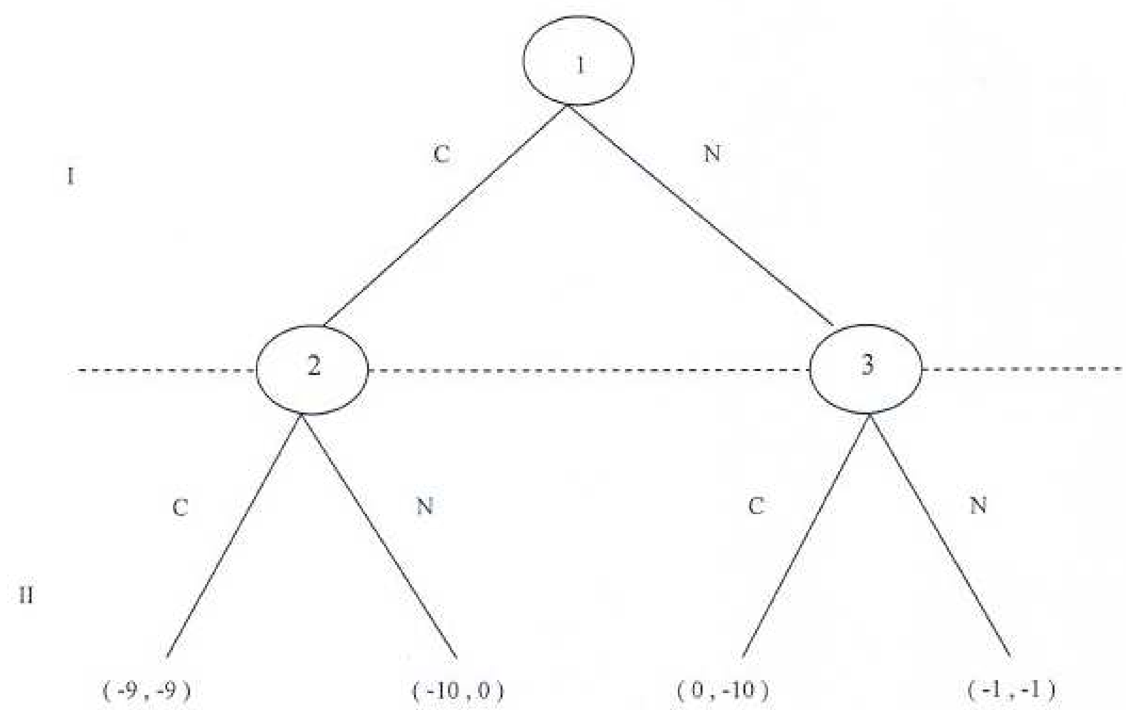
نلاحظ أن هذه اللعبة هي ذات شخصين (لاعبين) سنرمز لهما بـالرمز I و II وهي ذات مجموع غير صفري كما سنرى أدناه .

الاستراتيجيات :

نلاحـظ أن اللاعـب I يمتلك استراتيجيتين هما : I_1 الاعتراف C (confess) و I_2 الإنكار N (not confess) . كذلك فإن اللاعب الثاني يمتلك استراتيجيتين هما : II_1 الاعتراف C و II_2 الإنكار N .

شجرة المباراة :

على ضـوء البيانـات أعلاه فإن شجرة المباراة لهذه اللعبة هي كما في الشكل (1 ــ 3) .



شكل (1 ــ 3) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 2)

مصفوفة المباراة :

يتضح مما سبق أن المباراة ذات مجموع غير صفري وأن مصفوفتها معطاة بما يلي :

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad II_1 \quad & \quad II_2 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} (-9 , -9) & (-10 , 0) \\ \\ (0 , -10) & (-1 , -1) \end{bmatrix} \end{array}$$

الاستراتيجيات البحته (Pure strategies) والاستراتيجيات المختلطة (Mixed strategies)

لو عدنا إلى المثال (1 ــ 1) أعلاه نجد أن اللاعب I يملك 4 اســتراتيجيات ، ويملك اللاعب الثاني استراتيجيتان يشار لمثل هذه الاستراتيجيات على أنها استراتيجيات بحته أو خالصة .

على أن الحل الأمثل للاعبين قد لا يكون باختيار أحدهما لاستراتيجية بحته فلو تكررت اللعبة عدداً من المرات (100 مرة مثلاً) فإن اللاعب الأول مثلاً قد يجد أن عائده سيكون أفضل فيما لو قام يلعب كل من استراتيجياته الأربع نسبة من المرات الـ 100 التي تتكرر فيها اللعبة كأن يلعب الاستراتيجية I_1 بـ 50 % من المرات ويلعب الاستراتيجية I_2 بـ 40 % من المـرات ويلعب كلاً من الاستراتيجيتين I_3 و I_4 بنسبة 5 % من المرات (المجموع = 100 %) ونقول في هذه الحالة إن لدى اللاعب الأول الاستراتيجية المختلطة التالية (I_1, I_2, I_3, I_4) بالاحتمـالات (5 % ، 5 % ، 40 % ، 50 %) أو (0.05 ، 0.05 ، 0.4 ، 0.5) (المجموع يساوي 1) .

بالمثل إذا لعب اللاعب الثاني الاستـراتيجية II_1 بنسبة 70 % مـثلاً ولعب الاستراتيجية II_2 بنسبة 30 % من المرات قلنا إن لدى اللاعب الثـاني الاسـتراتيجية المختلطة (0.3 ، 0.7) لـ (II_1 , II_2) (المجموع يساوي 1) .

ولعل أهم فائدة لاستخدام الاستراتيجيات المختلطة هو أنها (وكما سنرى) تضمن وجود حل للعديد من المباريات (كالمباريات ذات المجمـوع الـصفري) مثلاً ولكن عيبها الرئيسي يكمن في أن بعض المباريات لا تتكرر أكثر من مـرة كما هي الحال في بعض النزاعات العسكرية ومع ذلك فإن هنـاك العديـد مـن المباريات التي تتكرر فيها السياسات المتوافرة لدى أطراف النزاع كتلك التي تقع بين الشركات المتنافسة .

في الأمثلة أعلاه كان اختيار أي من اللاعبين لاستراتيجية معينة مبنـي علـى اختيار مدروس لأحد الاستراتيجيات المتاحة . لكننا نواجه بعض الألعاب التـي تتعلـق بالحظ حيث لابد لنا عندئذٍ من إدخال العناصر الاحتمالية المقابلة وحيث نتحدث عنـدها عن القيـم المتوقعة المقابلة للاستراتيجيات المتاحة وسنوضح ذلك من خـلال المثـال التالي :

مثال (1 ـ 3)

يقــوم كل من اللاعبين A و B بوضع 1 $ في وعاء ليبــدءوا بعــدها اللعبــة التالية . توجد بطاقتان أحدهما تحمل الرمز H والأخرى تحمل الرمز L موضــوعتان على طاولة بطريقة تخفي رمز كل منهما . يقوم اللاعب A باختيار إحدى البطــاقتين ، وبعد النظر إليها يقوم بوضع إما 2 $ أو 4 $ في الوعاء . أما خيارات اللاعب B فهي إما أن ينسحب ويخسر الدولار الذي وضعه بداية في الوعاء أو أنه يضع نفس المبلــغ الذي وضعه اللاعب A في الوعاء (أي إما 2 $ أو 4 $) وينظر إلى البطاقــة التــي سحبها A . فإذا كانت البطاقة هي التي تحمل الرمز H فإن اللاعب B يــربح كامــل المبلغ المتجمع في الوعاء و إلا فإن اللاعب A يربح هذا المبلغ .

فلرسم شجرة المباراة في مثل هذه اللعبة نبدأ بعقدة تسمى عــادة عقــدة الحــظ (chance node) يتفرع عنها الحادثين H (الذي يقابل أن تكون البطاقة المسحوبة هي التي تحمل الرمز H) والحادث L (وهو الذي يقابل كون البطاقة المــسحوبة تحمــل الرمز L) . وكما نلاحظ فإن احتمال كل من هذين الحادثين هو $\frac{1}{2}$. وينظر إلى عقدة الحظ هذه كما لو أنها لاعب ثالث هو الطبيعة Nature وبموجب معطيات اللعبة وبعــد وقوع أحد الحادثين H أو L فإن أمام اللاعبين A و B الاستراتيجيات الموضحة أدناه :

A_1 : أن يضع 2 $ إذا كانت البطاقة H و 2 $ إذا كانت البطاقة L .

A_2 : أن يضع 2 $ إذا كانت البطاقة H و 4 $ إذا كانت البطاقة L .

A_3 : أن يضع 4 $ إذا كانت البطاقة H و 2 $ إذا كانت البطاقة L .

A_4 : أن يضع 4 $ إذا كانت البطاقة H و 4 $ إذا كانت البطاقة L .

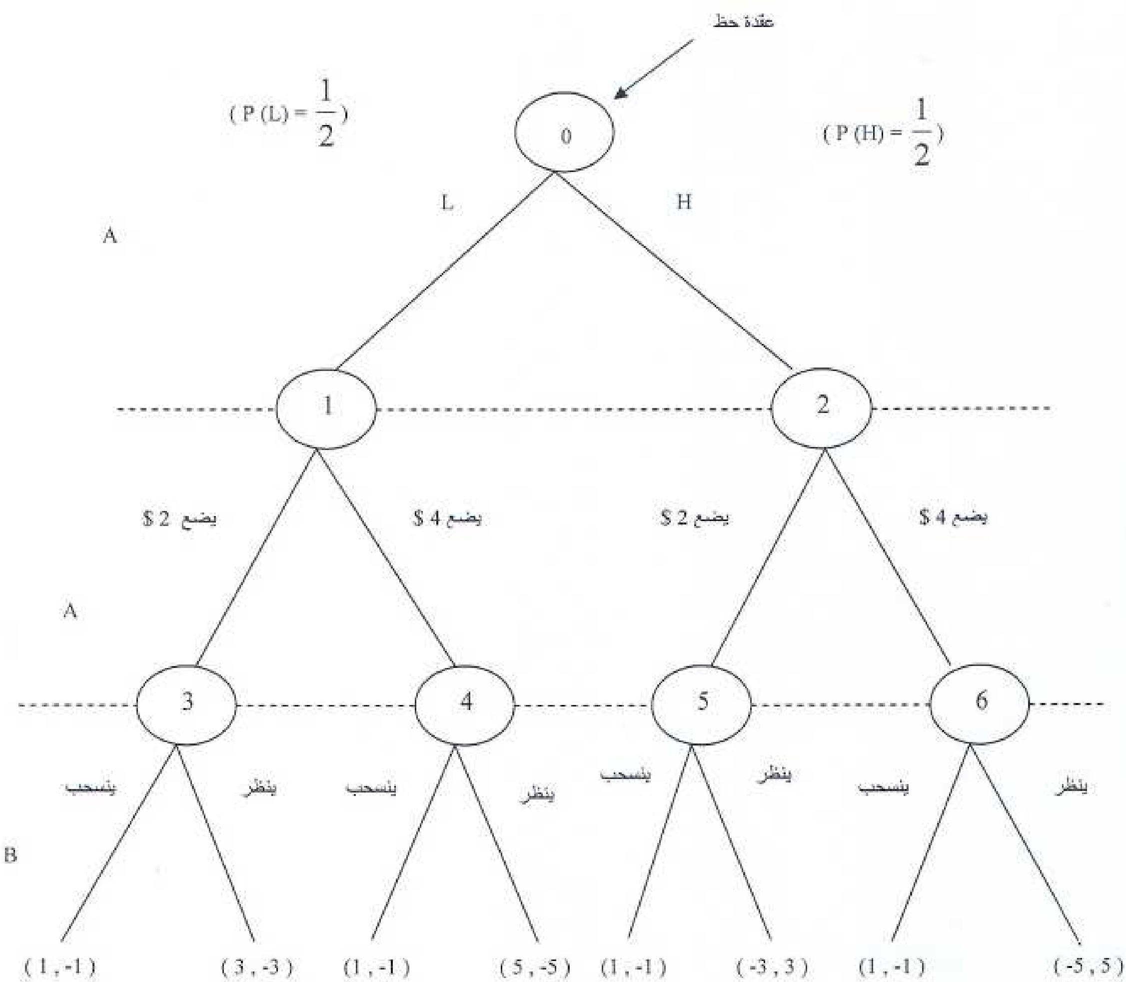
B_1 : أن ينسحب إذا وضع A (2 $) وينسحب إذا وضع A (4 $) .

B_2 : أن ينسحب إذا وضع A (2 $) وينظر إذا وضع A (4 $) .

B_3 : أن ينسحب إذا وضع A (4 $) وينظر إذا وضع A (2 $) .

B_4 : أن ينظر إذا وضع A (2 $) وينظر إذا وضع A (4 $) .

وتكــون شــجرة المبــاراة المقابلة في هــذه الحــالة على النحو المبين بالشكل (1 ـ 4) :



شكل (1 ــ 4) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 3)

ومن الواضح أن هذه المباراة ذات مجموع صفري .

لكن مصفوفة المباراة في هذه الحالة تتكون من القيم المتوقعة للنتائج المقابلة للاستراتيجيات المختلفة . فلو رمزنا بـ e_{ij} للقيمة المتوقعة المقابلة للاستراتيجية (A_i , B_j) حيث $i, j = 1, 2, 3, 4$ فبالنسبة لمثالنا .

e_{11} = القيمة المتوقعة للاستراتيجية (A_1, B_1) أي القيمة المتوقعة

عندما يضع A , 2 $, وينسحب B ، وكما هو ملاحظ من الشجرة أعلاه فـــإن هذا الأمر يقع مرتين الأولى عندما يقع الحادث H والقيمة المتوقعة المقابلة (اعتمـــاداً على نتائج الشجرة) هي $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ والثانية عندما يقع الحادث L والقيمـــة المتوقعـــة المقابلة هي $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وبذلك فإن $e_{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. وبالمثل نجد النتائج التالية :

$$e_{12}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1,\ e_{13}=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(-3)=0\ ,\ e_{14}=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(-3)=0$$

$$e_{21}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1,\ e_{22}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(5)=3,\ e_{23}=\frac{1}{2}(-3)+\frac{1}{2}(1)=-1$$

$$e_{24}=\frac{1}{2}(-3)+\frac{1}{2}(5)=1,\ e_{31}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1,\ e_{32}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(-5)=-2$$

$$e_{33}=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(1)=2,\ e_{34}=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(-5)=-1,\ e_{41}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1$$

$$e_{42}=\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{2}(-5)=0,\ e_{43}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1,\ e_{44}=\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{2}(-5)=0$$

وبذلك فإن مصفوفة المباراة لمثال (1 ــ 3) هي :

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

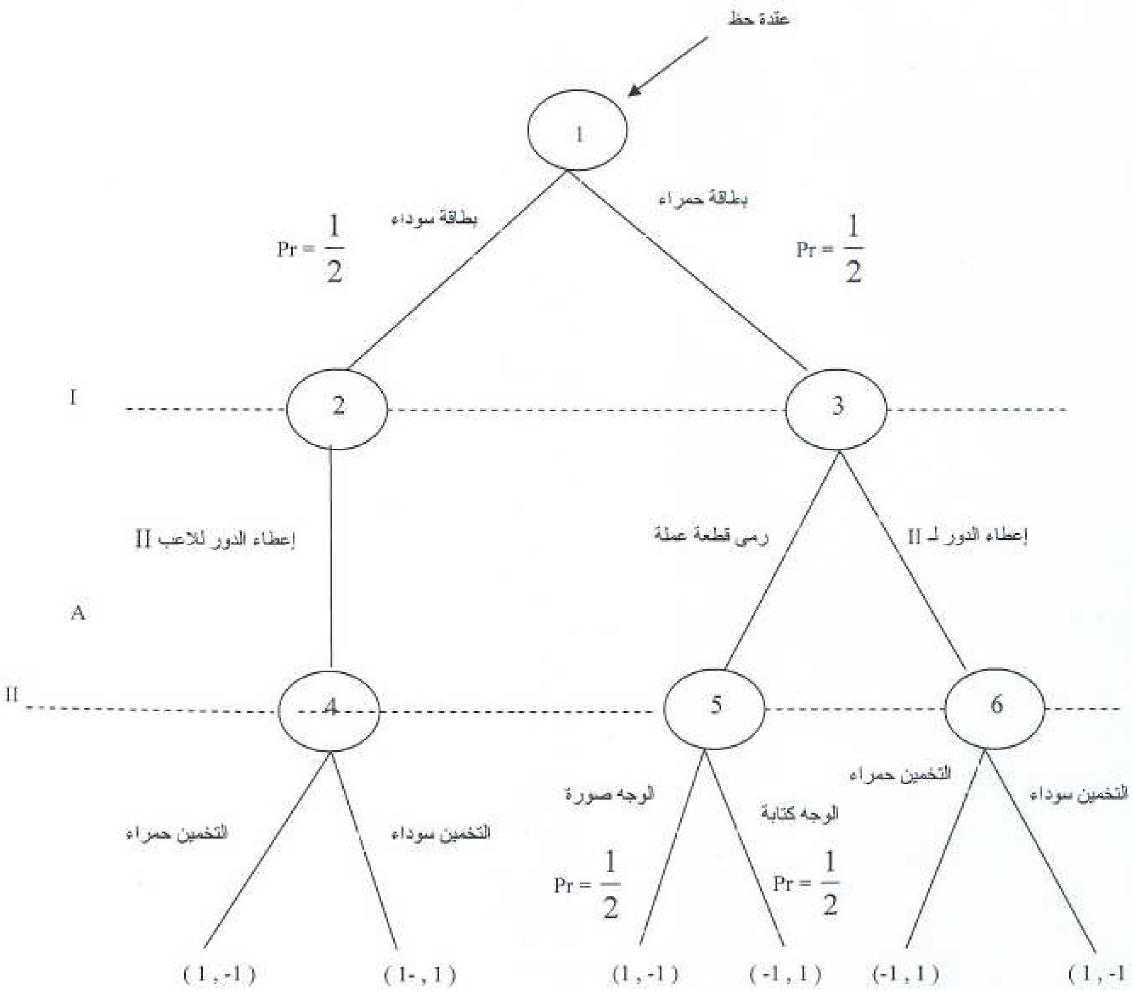
وتجدر الملاحظة هنا إلى أن مجموع الاحتمالات التي تنشأ عـــن عقـــدة الحـــظ المشار إليها أعلاه يجب أن يكون مساوياً الواحد . ولمزيد من الإيضاح لهـــذه النقطـــة نسوق المثال التالي :

مثال (1 ـ 4)

بطاقتان أحدهما حمراء R والأخرى سوداء B وهما موضوعات علــى طاولــة بطريقة تخفي لون كل منهما . يقوم اللاعب I بسحب إحدى البطاقتين والنظر إليها دون أن يعلن ذلك للاعب المنافس II . فإذا كانت البطاقة التي سحبها اللاعب I حمراء فإن أمامه خيارين هما أن يعطي دور اللعب لمنافسه II أو أن يرمي قطعة عملة متوازنــة . أما إذا كانت البطاقة سوداء فلا يوجد أمام اللاعب I سوى خيار وحيد وهو أن يعطــي دور اللعب لمنافسه II . وعندما يأخذ اللاعب II دوره في اللعب فإن عليــه أن يقــوم بتخمين لون البطاقة التي سحبها اللاعب I هل هي حمراء أو سوداء فإذا كان تخمينــه صحيحاً فإنه يربــح 1$ من اللاعب I و إلا فإن اللاعب I يربح منه 1$. أما عنــدما يختار اللاعب I رمي قطعة العملة فإن قواعد اللعبة تقتضي أن يربح 1$ من اللاعب II إذا ظهر الوجه الصورة و إلا فإن اللاعب II يربح 1$ مــن اللاعــب II . المطلــوب تحليل هذه اللعبة .

شجرة المباراة :

بناءً على المعلومات الواردة في المثال فإن شجرة المباراة معطاة كما في الشكل (1 ـ 5) .



شكل (1 ـــ 5) . شجرة المباراة لمثال (1 ـــ 4)

الاستراتيجيات :

بموجب معطيات المثال فإن لدى اللاعب I استراتيجيتان هما : I_1 : إعطاء دور اللعب لـــ II مهما كان لون البطاقة . I_2 : رمي قطعة عملة متوازنة إذا كانت حمـــراء وعندما يعطي اللاعب II دور اللعب فلديه استراتيجيتان هما II_1 : أن يخمن أن البطاقة التي سحبها I حمراء أو II_2 : أن يخمن أن البطاقة التي سحبها I سوداء .

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن النظر إلى الحوادث التي تنتج عن عقد الحظ في مثل هذه الأمثلة كما لو أنها استراتيجيات للاعب هو لاعـــب " الطبيعـــة Nature " وهـــذه الاستراتيجيات هي :

N_1 : أن تختار الطبيعة البطاقة الحمراء وتختار قطعة العملة ظهور الوجه الـــصورة وهما حادثـــان مســـتقلان احـــتمال كـــل منهما $\frac{1}{2}$ فاحـــتمال هذه الاستراتيجية (أو هذا الحادث) هو $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

N_2 : أن تختار الطبيعة البطاقة الحمراء وتختار قطعة العملة ظهور الوجـــه الكتابـــة وهما أيضاً حادثـــان مســـتقلان احـــتمال كل منها $\frac{1}{2}$ فاحتمال هذه الاستراتيجية (أو هذا الحادث) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

N_3 : أن تختار الطبيعة البطاقة السوداء واحتمال هذه الاستراتيجية (هذا الحادث) هو $\frac{1}{2}$. لاحـــظ أن مجمـــوع احتمالات الحـــوادث التي تنتـــج عن اختيـــــارات (استراتيجيات) لاعب الطبيعة يساوي $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$.

مصفوفة المباراة :

قبل إيجاد مصفوفة المباراة نلاحـــظ أن اســـتراتيجيات اللاعـــب الأول يمكـــن إعطاؤها بشكل أكثر وضوحاً كما يلي :

I_1 = — إذا كانت البطاقة حمراء فأعط دور اللعب لـــ II .
إذا كانت البطاقة سوداء فأعط دور اللعب لـــ II .

و I_2 = — إذا كانت البطاقة سوداء فأعط دور اللعب لـــ II .
إذا كانت البطاقة حمراء فارم قطعة عملة متوازنة .

وبذلك فإن :

$$e_{21}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(-1)=\frac{1}{2} \quad , \quad e_{12}=\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0,$$
$$e_{11}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(-1)=0 \quad , \quad e_{22}=\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=-\frac{1}{2}$$

ومصفوفة المباراة هي :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ملاحظة (1 ـ 1)

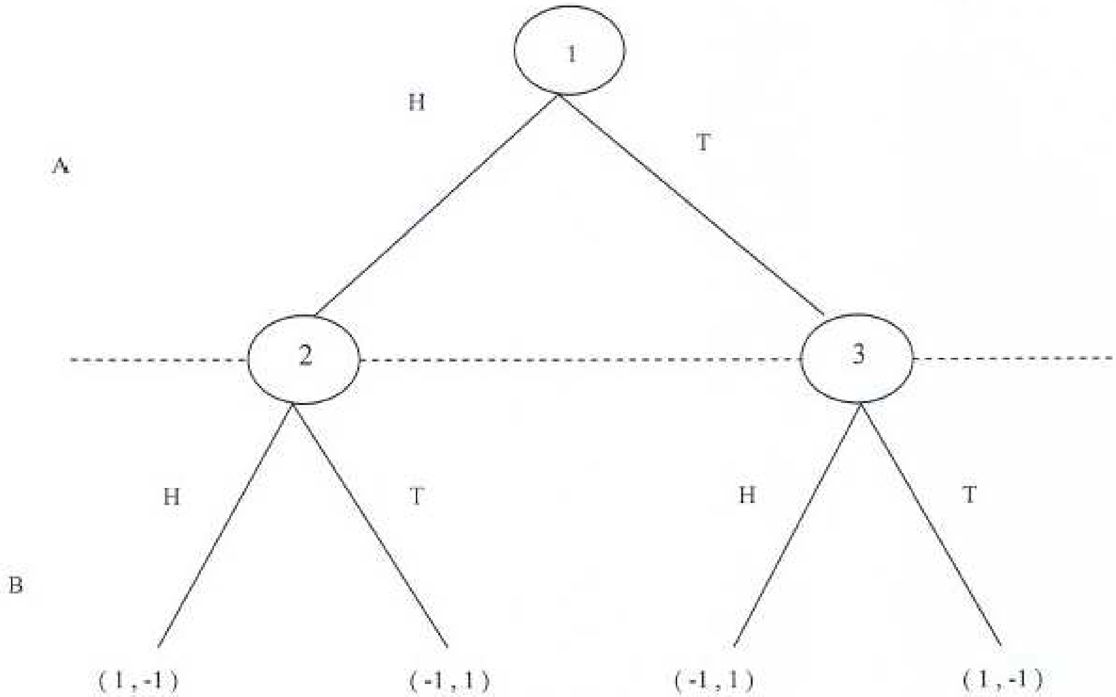
ثمة شيء يجب التنويه عنه هو ما سنطلق عليه مجموعة المعلومات (Information set) . ففي المثال (1 ـ 3) نجد أن اللاعب B لا يعرف بالضبط مقدار ما وضعه اللاعب A في الوعاء ولكنه يعرف أنه وضع 2 $ وهذا يقابل العقدتين (3) و (5) أو وضع 4 $ وهذا يقابل العقدتين (4) و (6) . نسمي كلا المجموعتين { (5) ، (3) }و { (6) ، (4) } بـ مجموعة معلومات . وكذلك فإن المجموعة { (6) و (4) } في مثال (1 ـ 4) هي مجموعة معلومات لأن اللاعب II يعرف أن دور اللعب قد أعطي له لكنه لا يعرف لون البطاقة التي سحبها I .

ولتوضيح أهمية مجموعة المعلومات نسوق المثال البسيط التالي :

مثال (1 ـ 5)

لنفرض أن اللاعبين A و B لعبا اللعبتين التاليتين :

اللعبة الأولى : لدى كل من اللاعبين قطعة عملة ويبدأ اللاعب A باختيار الوجه H أو الوجه T دون أن يعلن عن اختياره ثم يقوم بعدها اللاعب B باختيار H أو T ، فإذا توافقت الاختيارات فإن اللاعب A سيربح 1 $ (من B) و إلا فإن اللاعب B يربح 1 $ من A . عندئذٍ تكون شجرة المباراة لهذه اللعبة كما هي مبينة في الشكل (1 ـ 6) .



شكل (1 ــ 6) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 5) اللعبة الأولى

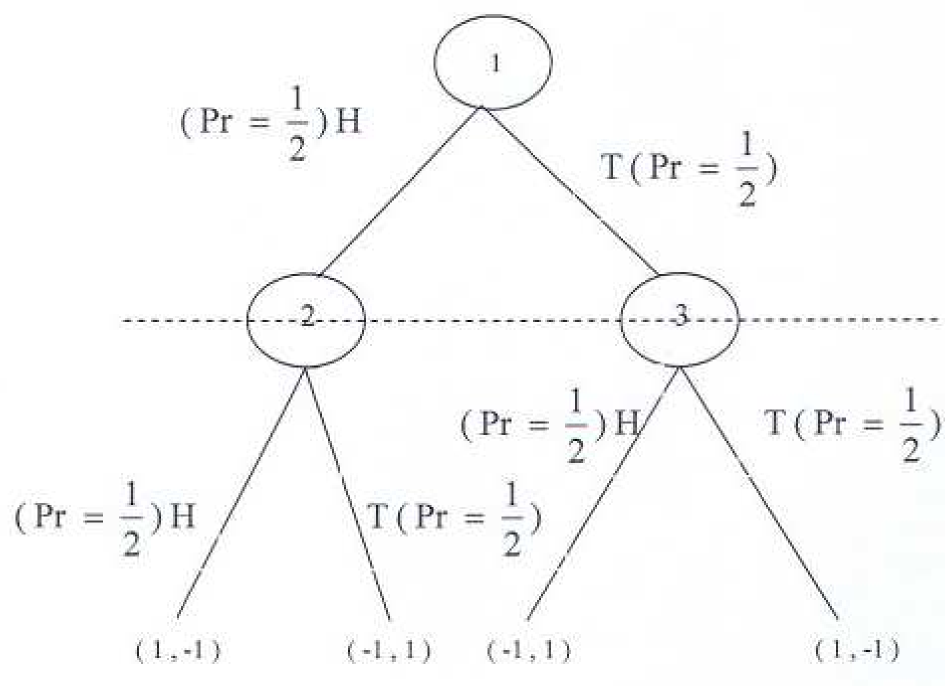
ومصفوفاتها هي (لاحظ أن المباراة ذات مجموع صفري) :

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ A & \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

وهنا نعتبر المجموعة { (3) ، (2) } مجموعة معلومات حيث يعــرف اللاعــب B أنه إما في (2) [تقابل الاختيار H للاعب A] أو فــي (3) [تقابــل الاختيــار T للاعب A] ولكنه لا يعرف أين هو بالضبط و إلا فإنه سيبني اختيــاره لاســتراتيجياته على هذه المعرفة . يقال عن هذا النوع من المباريات بأنها ذات معلومات غير كاملــة (Imperfect Information) كما سبق وأشرنا .

اللعبة الثانية : يقوم اللاعب A بقذف قطعة عملة متوازنة ثم يقوم بعـدها اللاعـب B بقذف هـذه القطعة وقـد اتفق اللاعبان على أنه إذا توافقت النتائج فإن A سيربح 1 $ (من B) وإذا اختلفت النتائج فإن B سيربح 1 $ (من A) . فهـذه المبـاراة ذات مجموع صفري .

إن شجرة المباراة هذه اللعبة المعطاة في شكل (1 ــ 7) تشبه إلى حد كبيـر شجرة اللعبة الأولى مع الفارق الرئيسي بأن اللاعب B يعرف أيـن هـو بالـضبط أي يعرف أنه في العقدة (2) إذا ظهرت H أو العقدة (3) إذا ظهرت T ولذا فلا معنـى هنا لوجود ما أسميناه مجموعة المعلومات . ويقال عن هذا النوع من المباريـات أنهـا بمعلومات كاملة (Perfect information) كما سبق وأشرنا .



شكل (1 ــ 7) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 5) اللعبة الثانية

وللحصول على مصفوفة المباراة لابد لنا هنا أن نوجد القيم المتوقعـة e_{ij} التـي يحصل عليها اللاعب A مقابـل الاسـتراتيجية (A_i , B_j) ($i = 1, 2$ و $j = 1, 2$) فنجد أن :

$$e_{11} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} \quad , \quad e_{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times -1 = -\frac{1}{4},$$
$$e_{21} = \frac{1}{2} \times 1 \times -1 = -\frac{1}{4} \quad , \quad e_{22} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

فهذه مصفوفة هي :

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ A & \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

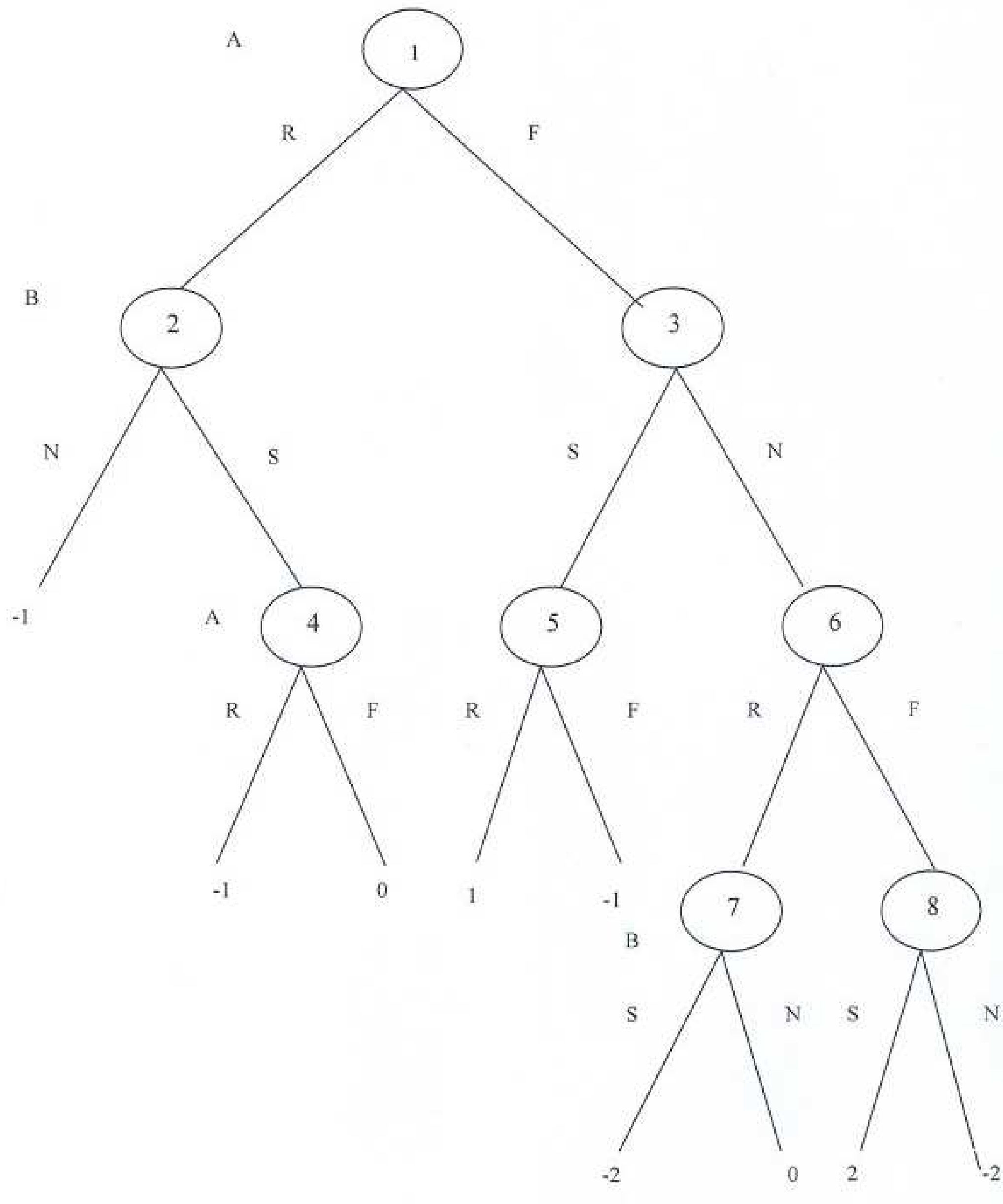
لاحظ هنا وجود أربع حوادث (استراتيجيات) تلعبها الطبيعة هـــي (H , H) ، (H , T) ، (T , H) ، (T , T) واحتمال كل منها هو $\frac{1}{4}$ (مجموعها = 1) .

ملاحظة (1 ـ 2)

يجب الانتباه كذلك إلى أننا لا نعتبر أي اختيار لأي من اللاعبين في أي مرحلة من مراحل اللاعب بأنه استراتيجية لذلك اللاعب ما لم يتبعه اختيار أو أكثـــر للاعـــب الخصم ولنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (1 ـ 6)

لنفرض أن لدينا مباراة ذات مجموع صفري لشخـــصين وأن شـــجرة المبـــاراة معطاة كما في الشكل (1 ـــ 8) التالي :



شكل (1 ــ 8) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 6)

عندئذٍ تكون استراتيجيات اللاعب A هي :

(R, R) , (R, F) , (F, R) , (F, F)

واستراتيجيات اللاعب B هي :

$$S , (N, N) , (N, S)$$

لاحظ مثلاً أننا لم نحتسب الاختيار N للاعب الثاني B لأنه لم يتبعها أي اختيار للاعب A لكن الاستراتيجية المنفردة S احتسبت لأنه تبعها اختيار للاعب A .

ملاحظة (1 ـ 3)

يطلق على شجرة المباراة عادة اسم الصيغة الشاملة (Extensive form) نظراً لأنها تشمل كافة المعلومات والنتائج المتعلقة بالمباراة ، كما ويطلق على مصفوفة المباراة اسم الصيغة الطبيعية (Normal form) .

تمارين (1 ـ 1)

1 ـ يقوم اللاعبين A و B باللعبة التالية : يختار A أحد الرقمين 0 أو 1 دون أن يعلن عن اختياره ، ثم يقوم بعدها اللاعب B كذلك باختيار أحد الرقمين 0 أو 1 دون أن يعلن عن اختياره ، ثم يقوم A باختيار 0 أو 1 . فإذا كان مجموعة الأرقام الناتجة زوجياً فإن B يدفع لـ A قيمة هذا الناتج بالدولار و إلا فإن A يدفع لـ B (يعتبر 0 رقم زوجي) . المطلوب :

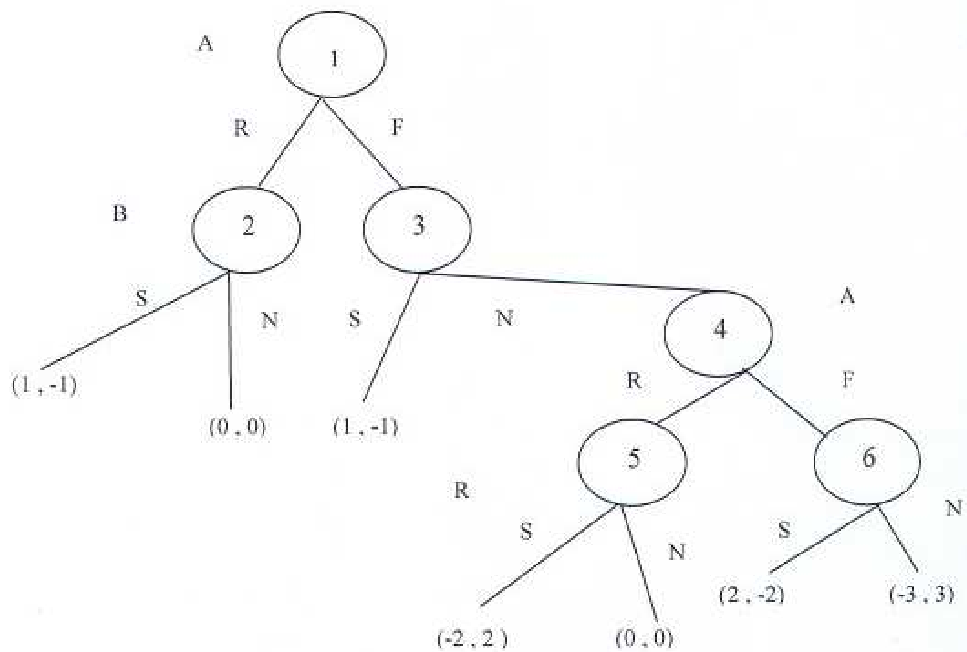
أ ـ رسم شجرة المباراة وتحديد مجموعات المعلومات إن وجدت .

ب ـ تحديد استرتيجيات كل من اللاعبين .

ج ـ إيجاد مصفوفة المباراة .

د ـ هل هذه المباراة ذات مجموع صفري أم لا ؟ .

2 ـ لنفترض أن المباراة بين شخصين A و B معطاة بالشجرة التالية :



المطلوب :

أ ــ إيجاد استراتيجيات كلاً من اللاعبين A و B ومصفوفة المباراة .

ب ــ هل هذه المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ وضح إجابتك .

3 ــ تتألف قوة عسكرية A من ثلاثة ألوية مدرعة تقوم بالدفاع عن المدينة C من خلال مدخلين (طريقين) رئيسيين للمدينة حيث يتوقع أن تتم مهاجمة المدينة من قوة ثانية معادية B عبر أحد هذين المدخلين أو كليهما . تتألف القوة B من لواءين ويمكنها مهاجمة المدينة C إما بلواء عبر كل مدخل رئيسي أو باللواءين عبر أحد المدخلين . يمكن للقوة المدافعة A أن تقوم بالدفاع عن أحد المدخلين أو لواءين للدفاع عن أحد المدخلين ولواء للدفاع عن المدخل الآخر . وتقتضي قواعد اللعبة العسكرية أن تحصل القوة A أو القوة B من المكاسب ما يساوي إلى الفرق بين عدد ألويتها وعدد الألوية الخصم . والمطلوب :

أ ــ رسم شجرة المباراة على أنها ذات مجموع صفري .

ب ــ إيجاد استراتيجيات كل من القوتين A و B .

جـ ــ إيجاد مصفوفة المباراة الناتجة .

د ــ هل هذه المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ وضح إجابتك .

4 ـــ تتنافس شركتان لعرض منتجاتهما في اثنين من الأسواق الرئيسية فـــي إحـــدى المدن ويتوقع أن يكون عدد الزبائن في السوق الأولى مـــساوياً 10000 وفـــي السوق الثانية 15000 ونتيجة للدراسة التي أجرتها كل من الشركتين فقد وجدتا ما يلي :

(I) إذا شـــاركتا في نفـــس الســـوق فيتوقع أن تبيع كل منهما بضاعتها إلى 40 % من الزبائن .

(II) إذا لم تشـــاركا بنفـــس الســـوق فيتوقع أن تبيع كل منهما بضاعتها إلى 75 % من الزبائن .

وتهدف كل شركة أن تجعل الفرق بين عدد زبائنها وزبائن الشركة الأخرى أكبر ما يمكن .

والمطلوب : إيجاد شجرة المباراة والاستراتيجيات والمصفوفة المقابلـــة للعبـــة المنافسة بين الشركتين . هل هذه المباراة ذات مجموع صفري ؟ . وهـــل هـــي ذات معلومات كاملة ؟ وضح إجابتك .

5 ـــ تقوم شركتان بصناعة تلفزيونات ملونة وغير ملونة ، تستطيع الشركة الأولـــى صناعة إما 200 تلفزيون ملون في الأسبوع أو 200 تلفزيون غير ملـــون فـــي الأسبوع. يقدر ربح كل وحدة بـــ 30 $ لكل تلفزيون ملون و 15 $ لكل تلفزيون غير ملـــون . تستطيع الشـــركة الثانيـــة أن تصـــنع إما 200 تلفـــزيون ملون أو 400 تلفزيون غير ملون في الأسبوع . يستوعب السوق مـــا مقـــداره 200 تلفزيون ملون و 400 غير ملون ، ويتوقع أن تكون حصة كل مـــن الـــشركتين بنسبة ما تنتجه كل منهما من كلا النوعين فمـــثلاً إذا أنتجـــت الأولـــى 200 تلفزيون ملون وأنتجت الأخرى 100 تلفزيـــون ملـــون فعندئـــذٍ تبيـــع الأولـــى $\frac{200}{600}\times 200$ وتبيـــع الثانية $\frac{200}{600}\times 100$. ارســـم شـــجرة المبـــاراة واكتـــب مصفوفتها .

6 ـــ تتسابق شركتان A و B لتنفيذ أحد المشاريع . يبلغ معدل الـــضرائب القـــانوني السنوي للشركة A والخاصة بالمـــشروع $ 4000000 ، كمـــا يبلـــغ معـــدل الضرائب السنوي للشركة B والخاصة بالمشروع $ 12000000 . ويمكن لكل

من الشركتين أن تسلك أحد خيارين ، فإما أن توافق على المشروع وتدفع الضرائب المستحقة قانوناً أو أن تقوم بعملية تزوير لتبين أنه لا ضرائب مستحقة عليها . لكن مصلحة الضرائب يمكنها فقط أن تدقق مدخولات واحدة من الشركتين كل عام فإذا تمكنت هذه المصلحة من تدقيق مدخولات الشركة الكاذبة فإنها ستتمكن من كشف التزوير وستقوم الشركة الكاذبة عندئذٍ بدفع مستحقاتها من الضرائب مضافاً إليها غرامة تساوي نصف الضرائب المستحقة عليها قانوناً . أرسم شجرة المباراة للمشكلة وأوجد مصفوفتها .

7 ـ تحوي كل من علبتي كبريت عودين من الثقاب ، يقوم لاعبين A و B باللعبة التالية : يقوم اللاعب A بسحب عود أو عودين من الثقاب من واحدة فقط من العلبتين ، ثم يتبعه بعد ذلك اللاعب B . واللاعب الخاسر هو الذي يسحب العود (أو العودين) الأخير (الأخيرين) ومقدار خسارته هو أن يدفع $ 2 للاعب الآخر . والمطلوب :

1 ـ ارسم شجرة المباراة .

2 ـ حدد استراتيجيات كل من اللاعبين .

3 ـ أوجد مصفوفة المباراة .

4 ـ هل المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ وضح إجابتك .

8 ـ توجد على طاولة بطاقتا لعب ، أحدهما تحمل رقم 1 (أس) والأخرى رقم 2 . يقوم كل من اللاعبين A و B بوضع $ 1 في وعاء ثم يقوم A بسحب إحدى البطاقتين دون النظر إليها وإعطائها إلى B . فينظر إليها B فإذا كانت أس فعلى B أن يقول أنها أس ، أما إذا كانت 2 فيمكن لـ B عندها أن يقول أس أو 2 فإذا قال 2 فإنه يخسر المباراة والـ $ 1 في الوعاء أما إذا قال أس فعليه وضع $ 1 آخر في الوعاء وعندها يمكن لـ A إما أن يصدق ما قاله B ويخسر الـ $ 1 الذي وضعه بداية في الوعاء أو أن يطلب رؤية البطاقة . فإذا كانت أس فإن B سيربح المبلغ المتجمع في الوعاء أما إذا كانت 2 فإن A سيربح هذا المبلغ . المطلوب :

1 ـ رسم شجرة المباراة .

2 ـ تحديد استراتيجيات كل من اللاعبين .

3 ـــ إيجاد مصفوفة المباراة .

4 ـــ هل هذه المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ أوجد مجموعات المعلومات في حالة النفي .

9 ـــ يقوم لاعبين I و II بلعب اللعبة التالية : يقوم اللاعب I بسحب واحدة من 3 أوراق اللعب هي الأس ، الملك أو الملكة (والذي سنرمز لها بـــ Q و K و A على الترتيب) بطريقة عشوائية وإعطائها للاعب II الذي يقوم بالنظر إليها . فإذا كانت الأس (A) فإن على II أن يعلن عنها وإذا كانت الملك (K) فإن II يمكن أن يقول أس (A) أو ملك (K) ، أما إذا كانت الملكة فإن II يمكن أن يقول أنها أس (A) أو ملكة (Q) . فإذا قال II عن الورقة أنها الأس فإن I يمكن أن يصدقه ويدفع له عندئذٍ 1$ أو أن يطلب رؤية الورقة وعندئذٍ إذا كانت الورقة هي الأس فإن I يدفع لـــ II مبلغ 2$ ، أما إذا كانت غير ذلك فإن II يدفع لـــ I مبلغ 2$. وإذا قال II أن الورقة المسحوبة هي الملك فإنه لا يترتب على ذلك أي خسارة للاعبين ، أما إذا قال II عن الورقة المسحوبة بأنها الملكة فعندئذٍ سيدفع II لـــ I مبلغ 1$. والمطلوب :

1 ـــ رسم شجرة المباراة .

2 ـــ تحديد استراتيجيات كل من اللاعبين .

3 ـــ إيجاد مصفوفة المباراة .

المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين
Two-Zero-Sun Games

(2 ــ 1) مقدمـــــــة

إن أول تطوير للرياضيات المتعلقة بنظرية المباريات قد تم على المباريات التي أسميناها المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين . ومع أن هذا النوع من المباريات لا ينطبق إلا على القليل من الحالات التي تنشأ في الواقع العملي إلا أن طــرق الحــل المتعلقة بها تلعب دوراً أساسياً في حل المباريات ذات المجموع غير الصفري .

تتميز المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين بالخصائص التالية :

1 ــ لدينا لاعبين فقط يمكن لكل منهما اختيار واحدة من عدد محدد (منتــه) مــن الاستراتيجيات .

2 ــ إن اصطلاح " المجموع الصفري " يعني أن أي ربح (أو عائد) يحققــه أحــد اللاعبين لــدى لعبه استراتيجية معينة يســاوي بالضبط خسارة (أو معكوس) ما يحققه اللاعب الآخر لدى لعبه الاستراتيجية المقابلة أو أن مجمــوع عوائــد اللاعبين لدى لعبهما أي استراتيجيتين متقابلتين يكون صفراً أو مقداراً ثابتاً .

3 ــ لدى كل من اللاعبين معرفة كاملة عن كــل الاســتراتيجيات المتــوافرة لكــلا اللاعبين كما أن العوائد المقابلة لكل استراتيجية تنافسية معروفة لكلا اللاعبين .

4 ــ يُنظر إلى كل من اللاعبين على أنه شخصي الاهتمام (Rational) بمعنى أنــه ينظر إلى جعل عوائده (أو عوائده المتوقعة إذا وجدت عناصر احتماليــة فــي اللعبة) أكبر ما يمكن .

5 ــ لا يسمح لأي من اللاعبين أن يقوم بعمليــة منــاورة أو احتيــال أو مســاومة Bargaining ويتم ضمان ذلك باشتراط أن الاستراتيجيات يتم اختيارهــا بــآن واحد .

6 ـ يتم التعبير عن عوائد اللاعبين بكتابة عوائد اللاعب الأول على أن تفهم عوائد اللاعب الثاني ضمناً والأمثلة (1 ـ 1) ومن (1 ـ 3) إلى (1 ـ 6) هي أمثلة على مباراة ذات مجموع صفري لشخصين .

كما سنرى أدناه فإن معرفة مصفوفة المباراة ستكون كافية لإيجاد كل من الحل الأمثل أي الاستراتيجيات المثلى للاعبين وقيمة المباراة (وهو ما نطلق عليه حل المباراة) ولذلك سنكتفي في الأمثلة القادمة بذلك .

(2 ـ 2) حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين

لنفرض أن لدينا لاعبين A و B يلعبان مباراة ذات مجموع صفري وأن اللاعب A يمتلك m استراتيجية هي $A_1 , A_2 , \ldots , A_m$ وأن اللاعب B يمتلك n استراتيجية هي $B_1 , B_2 , \ldots , B_n$ ، ولنرمز e_{ij} للقيمة المتوقعة للعائد الذي يحصل عليه A لدى لعب الاستراتيجية (A_i , B_j) (نذكر بأن B يحصل عندئذٍ على $- e_{ij}$) عندئذٍ تكون مصفوفة المباراة ولتكن G هي مصفوفة $m \times n$ ومعطاة كما يلي :

$$G = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i1} \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} B_1 & & B_2 & \ldots & B_j & \ldots & B_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} e_{11} & & e_{12} & \ldots & e_{1j} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & & e_{22} & \ldots & e_{2j} & \ldots & e_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{i1} & & e_{i2} & \ldots & e_{ij} & \ldots & e_{in} \\ \hdashline e_{m1} & & e_{m2} & \ldots & e_{mj} & \ldots & e_{mn} \end{array} \right] \end{array}$$

بعد معرفة مصفوفة المباراة G سنكون قادرين وبشكل عام على حل المباراة .
وتستند فكرة حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين على التحليل التالي :

ينظر إلى المباريات ذات المجموع الصفري بأنها غير تعاونية (Noncooperative) بمعنى أن كلاً من الخصمين يسعى إلى جعل عوائده أكبر ما يمكن وهذا يعني ضمناً جعل عوائد الخصم أقل ما يمكن . فبالنسبة للاعب الأول (A مثلاً) فإنه سيحاول النظر إلى أقل عائد يمكن أن يحصل عليه مقابل كل من استراتيجياته وسيقوم بعدها باختيار الاستراتيجية التي تقابل أكبر هذه النتائج وهو يضمن بذلك أنه لن يحصل على عائد أقل من ذلك مهما كانت الاستراتيجيات التي يتبعها خصمه (اللاعب B) . وبلغة أخرى إذا افترضنا أن e_{ij} هو العائد المتوقع لدى استخدام الاستراتيجية A_i للاعب A

ضد الاستراتيجية B_j للاعب B فإن اختيار اللاعب A للاستراتيجية التي تقابل القيمة υ_l المعطاة بـــ :

$$\upsilon_l = \max_i \,(\operatorname{Min}_j e_{ij}) \qquad (2.1)$$

تعني أن اللاعب A لن يحصل على نتيجة أقل من υ_l المحددة بالعلاقـــة (1) مهمـــا كانت الاستراتيجية التي يختارها اللاعب B . ولذا فإن القيمة υ_l هذه تسمى القيمة الدنيا (lower value) للمباراة .

بالمقابل فإن اللاعب B (خصم A) سيتبع نفس سياسة A فـــإذا تـــذكرنا أن عناصر مصفوفة العوائد هي تعبير عن عوائد اللاعب A وأن عوائد اللاعب B هـــي بالضـــبط عوائد اللاعب A مضروبة بـــ 1− فإن ذلك يعني أن اللاعـــب B ســـيقوم بالآتي :

من أجل كل من استراتيجياته سيقوم اللاعب B باختيار أكبر العوائد التي حصل عليهـــا A (وهذا يقابل أقل العوائد التي حصل عليها B) ثم يقوم بعدها باختيار الاستراتيجية التي تقابل أقل هذه النتائج (أكبرها بالنسبة لـــ B) . وبعبارة أخرى فإن اللاعـــب B سيختار الاستراتيجية التي تقابل القيمة υ_u المعطاة بـــ :

$$\upsilon_u = \min_j \,(\operatorname{Max}_i e_{ij}) \qquad (2.2)$$

وباختيار اللاعب B للاستراتيجية المحددة بالعلاقـــة (2) فإنـــه سيضـــمن أن اللاعب A لن يحصل على أكثر من القيمة υ_u ولذا تسمى هذه القيمـــة بالقيمـــة العليـــا (upper value) للمباراة وبالطبع سيكون لدينا بشكل عام :

$$\upsilon_l \le \upsilon_u \qquad (2.3)$$

فمثلاً لو أخذنا المباراة :

$$\begin{array}{cc}
 & \\
G = & \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \\
\max & \begin{array}{cc} 0 & \quad 0 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c} \min \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

نجد أن :

$$\upsilon_l = -\frac{1}{2}$$

$$\upsilon_u = 0$$

وبالتالي فإن : $\upsilon_l \neq \upsilon_u \qquad (\upsilon_l < \upsilon_u)$

وتعني هذه النتيجة أن اقل قيمة يمكن أن يحصل عليها اللاعب الأول هـي $\upsilon_l = -\frac{1}{2}$ ولكن اللاعب الثاني سيمنعه من الحصول على أكثر من 0 $(\upsilon_u = 0)$.

تعريف (2 ــ 1)

في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين نسمي الاستراتيجية التي يكون من أجلها :

$$\upsilon_l = \upsilon_u = \upsilon \qquad (4.2)$$

بالاستراتيجية المثلى (أو الحل الأمثل) ونسمي القيمة υ بقيمة المباراة . واستناداً إلى المناقشة أعلاه فإن υ هي القيمة التي يحصل عليها A . أما B فيحصل على $-\upsilon$.

فإذا تحققت العلاقة (4.2) من أجل استراتيجية بحتـه (خالصـة) قلنـا إن للمباراة نقطة سرجية (Saddle point) أو نقطة توازن . و إلا فـإن الحـل الأمثـل سيكون إحدى الاستراتيجيات المختلطة التي أشرنا إليها أعلاه . ولمزيد مـن الإيضـاح نسوق الأمثلة التالية :

مثال (2 ــ 1)

في أي المبارياتين التاليتين توجد نقطة سرجية :

$$G_1 = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -5 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 7 & -3 & 5 & -1 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{Min} \\ -3 \\ -6 \\ 3 \\ -3 \end{array} \\ \text{Max} \quad 7 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 6 & \end{array} \quad , \quad G_2 = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{min} \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{array} \\ \text{max} \quad 6 \quad 6 \quad 9 & \end{array}$$

وما هو الحل الأمثل عندئذٍ ؟

حـل المباراة G_1 :

نلاحظ أن :

$$\upsilon_l = \text{Max}\ (\text{Min}\ e_{ij}) = \text{Max}\ \{-5, -6, 3, -3\} = 3$$
$$\upsilon_u = \text{Min}\ (\text{Max}\ e_{ij}) = \text{Min}\ \{7, 3, 5, 6, 6\} = 3$$

نلاحظ أن : $\upsilon_l = \upsilon_u = 3$ ويقابل ذلك الاستراتيجية (A_3, B_2) لذا فـإن الاسـتراتجية (A_3, B_2) أو النقطة 3 المقابلة لهذه الاستراتيجية هي نقطة سرجية والحل الأمثل هو :

الاستراتيجية A_3 هي المثلى للاعب A

الاستراتيجية B_2 هي المثلى للاعب B

وقيمة المباراة هي $\upsilon = 3$ والتي تعني أن اللاعـب A لا يحصـل على أقل أو أكثر من 3 . أما اللاعب B فيحصل على 3- .

المباراة G_2 :

نلاحظ أن :

$$\upsilon_l = \text{Max}\ \{2, 5, 4\} = 5$$
$$\upsilon_u = \text{Min}\ \{6, 6, 9\} = 6$$

إذاً $\upsilon_l \neq \upsilon_u$ ولا توجد نقطة سرجية لهذه المباراة . وسنتعرف على حل مثـل هـذه المباراة (وهو استراتيجية مختلطة) فيما بعد .

(2 ـ 3) حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين من الشكل 2 x 2

بالعودة إلى المباراة :

$$\begin{array}{cc} G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} \\ \quad\quad\ \ y \quad\quad 1-y & \end{array}$$

فقد وجدنا أن $\upsilon_u = 0 \neq \upsilon_l = -\frac{1}{2}$ ويعني ذلك أن اللاعب الأول يمكــن أن يحصــل على قيمة بين $0, -\frac{1}{2}$. والسؤال كيف نحل مثل هذه المباراة ؟ وللإجابة نذّكر أولاً أن الحل لمثل هذه المباراة (ذات المجموع الصفري) هــو اســتراتيجية مختلطــة مــن الاستراتيجيتين المتاحتين له والتي يمكن أن توفر له عائداً متوقعاً أفضل من $-\frac{1}{2}$ ولكنه لا يتجاوز 0 ولذلك بتكرار كلاً من الاستراتيجيتين المتاحتين بنسبة معينة من المــرات أي أن يلعب كلاً منهما باحتمال مناسب يحسّن من عائده المتوقع . وتعني كلمة " العائد المتوقع " أننا نفترض ضمناً بأن المباراة تتكرر عدداً كبيراً من المرات وذلــك حســبما يقتضيه مفهوم التوقع في نظرية الاحتمـــالات . فلــو فرضـــنا أن اللاعـــب A يلعـــب الاستراتيجية المختلطة (x_1 , x_2) وأن اللاعــب B يلعــب الاستراتيجيــة المختلطــة (y_1 , y_2) [نذكــر بأن $x_1 + x_2 = 1$ و $y_1 + y_2 = 1$] كان لدينا ما يلي :

للتسهيل نفرض :

$$x_1 = x, y_1 = y \quad \text{عندئذٍ} \quad x_2 = 1 - x \quad \text{و} \quad y_2 = 1 - y$$

عندئذٍ فإن اللاعب A يرغب بالحصول على نفس العوائد مهما كانت الاستراتيجية التي يختارها اللاعب B ونفس الشيء بالنسبة للاعب B . الآن لدينا ما يلي :

العائد الذي يحصل عليها اللاعب A إذا استخدم اللاعب B الاستراتيجية B_1 هو :

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 0.x + (-\frac{1}{2})(1-x)$$

والعائد الذي يحصل عليه A إذا استخدم B الاستراتيجية B_2 هو :

$$-x = (-1)x + 0.(1-x)$$

وبمساواة هذين العائدين نحصل على المعادلة التالية بـــ x وهي :

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = -x \qquad (5.2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} (\Rightarrow 1 - x = \frac{2}{3})$$

وبالتالي فإن على A لعب الاستراتيجية المختلطة $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ والتي تعني أنه لو تكـــررت اللعبة عدداً من المرات فعلى A أن يلعب الاســـتراتيجية A_1 ثلـــث المـــرات ويلعـــب الاستراتيجية A_2 ثلثي المرات . وبالمثل فإن العائد الذي يحصل عليـــه اللاعـــب B إذا استخدمت A_1 هو :

$$0 . y + (-1) (1 - y) = -1 + y$$

والعائد الذي يحصل عليه اللاعب B إذا استخدمت A_2 هو :

$$(-\frac{1}{2})\, y + 0 . (1 - y) = -\frac{1}{2}\, y$$

وبمساواة هذين العائدين نحصل على المعادلة :

$$-1 + y = -\frac{1}{2}\, y \qquad (6)$$

وحلها يعطي $(1 - y = \frac{1}{3})\ \ y = \frac{2}{3}$. إذاً علـــى اللاعـــب B أن يلعـــب الاســـتراتيجية المختلطة $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. ويمكنا الآن حســـاب قيمة المباراة إما بتعويض x بقيمتهـــا فـــي العلاقة (5) أو y بقيمتها في العلاقة (6) وفي الحالتين نحصل على قيمة المباراة :

$\upsilon = -\frac{1}{3}$ وهي القيمة التي يحصل عليها A أما B فيحصل على $\frac{1}{3}$.

ملاحظة (2 ـ 1)

هناك طريقة بسيطة لحل مسائل المباريات **2 x 2** ذات المجموع الصفري وهي كما في المثال التالي :

مثال (2 ـ 2) :

لنأخذ المباراة التالية :

$$G = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 5 & 4 \end{array} \end{array}$$

نقوم أولاً بالتأكد أن المباراة لا تملك نقطة سرجية ثم نقوم بعدها بطرح الرقم الصـــغير في كل ســـطر (في كل عمـــود) من الرقـــم الكبير ونضع نتائج الطرح مقابل السطر (العمود) الآخر ثم نقسم كل ناتج مقابل كل سطر (كل عمود) على مجموع الناتجين في السطرين أي على 3 + 2 = 5 (في العمودين أي على 4 + 1 = 5) . وجميع هذه العمليات موضحة أدناه :

$$G = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 5-3=2 \\ 4-1=3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 4-3=1 & 5-1=4 \end{array} \end{array}$$

$$G = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2/5 \\ 3/5 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1/5 & 4/5 \end{array} \end{array}$$

عندئذٍ تكون الاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب A هـــي $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$ لـــــ $(A_1\ ,\ A_2)$ والاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب B هي $(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$ لـــــ $(B_1\ ,\ B_2)$. أمـــا قيمـــة المباراة فنحصل عليها بإحدى الطريقتين :

الطريقة الأولى : أن نضرب الاحتمالات $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$ العائـــدة للاعـــب A بالعوائـــد المقابلة في أي عمود . أي :

$$\upsilon = \frac{2}{5}\times 4 + \frac{3}{5}\times 3 = \frac{17}{5} \quad \text{أو} \quad \upsilon = \frac{2}{5}\times 1 + \frac{3}{5}\times 5 = \frac{17}{5}$$

الطريقة الثانية : أن نضرب الاحتمالات $(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$ العائدة للاعـــب B بالعوائـــد المقابلة في أي سطر . أي :

$$\upsilon = \frac{1}{5}\times 5 + \frac{4}{5}\times 3 = \frac{17}{5} \quad \text{أو} \quad \upsilon = \frac{1}{5}\times 1 + \frac{4}{5}\times 4 = \frac{17}{5}$$

إذاً A يحصل على $\frac{17}{5}$ فهو اللاعب الرابح بينما يحصل B علـــى $-\frac{17}{5}$ فهـــو اللاعب الخاسر . وهذا أمر طبيعي بملاحظة أن جميع عوائد A في المصفوفة G هـــي موجبة بينما عوائد B هي سالبة .

وكما أشرنا في الفصل الأول فإن استخدام فكرة الاستراتيجيات المختلطة (مـــن الخالصة) قد أثرى نظرية المباريات فقد أثبت ڤون نيومان عام 1937 النظرية التالية :

نظرية (2 ـ 1)

في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين إذا كان كل من اللاعبين يملـــك عدداً منتهياً من الاستراتيجيات الخالصة فعندئذٍ يوجد على الأقل حل للمباراة يتمثل فـــي استراتيجية خالصة أو مختلطة .

(2 ـ 4) الهيمنة في الاستراتيجيات ذات المجموع الصفري لشخصين

نصادف أحياناً مباريات تكون فيها عوائد استراتيجية ما لأحـــد اللاعبين أفضل من (أو تعادل) مقابلاتها لاستراتيجية أو أكثر عندئذٍ نقول إن الاســـتراتيجية الأولـــى تهيمن (dominate) على الاستراتيجيات الأخيرة ويمكننا عندئذٍ حذف هذه الأخيرة من مصفوفة المباراة (وبالطبع فإنه في حال وجود استراتيجيات مكرره فإنه يُكتفى ببقـــاء أحدها) وفي حال كانت العوائد لاستراتيجية أفضل تماماً من مقابلاتهـــا لاســـتراتيجية أخرى فإننا نقول إن الأولى تهيمن هيمنة مطلقة على الثانية . لنوضح ذلـــك بالأمثلـــة التالية :

مثال (2 ـ 3)

اختصر كلاً من المباريات (ذات المجموع الصفري لشخصين) التاليـــة إلـــى أقصى ما يمكن :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 6 & 11 \\ -14 & 4 & -10 & -8 \\ 0 & -2 & 12 & -6 \\ 12 & -12 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

حـــــل

G_1 : نلاحظ أن عوائد الاستراتيجية A_2 أفضل من مقابلاتها للاستراتيجية A_1 لذا فإن G_1 تختصر كمرحلة أولى إلى [5 4] فـإذا تـذكرنا أن [5 4] تعنـي أن اللاعب B يحصل على 4− في الاستراتيجية B_1 وعلى 5− في الاسـتراتيجية B_2 فإنه يمكن حذف الاستراتيجية B_2 واختصار G_1 إلى [4] فالحـل الأمثـل للمباراة هو $(A_2 \ , \ B_1)$ وقيمته $\upsilon = 4$ (لاحظ أن 4 هي نقطة سرجية للمباراة G_1 حتى ولو لم نقم باختصارها) .

G_2 : لا توجد هيمنة بين استراتيجيات اللاعب A . وبالنسبة للاعب B فإن B_2 تهيمن على B_3 ويقود ذلك إلى المباراة :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

وهو أقل اختصار ممكن للمباراة G_2 . لاحظ أنه لا توجد لهذه المبـاراة نقطـة سرجية وسنتعرف بعد قليل على كيفية حل مثل هذا النوع من المباريات .

G_3 : نلاحظ أن A_1 تهيمن على A_2 و A_4 فنحصل على المباراة :

$$\begin{bmatrix} 16 & 14 & 6 & 11 \\ 0 & -2 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

وفيها B_4 تهيمن على B_1 و B_2 فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

وليس لهذه الأخيرة نقطة سرجية لكنها من النوع 2 x 2 لذا يمكن حلها بالطريقة البسيطة المشار إليها في الملاحظة (2 ــ 1) أعلاه حيث نجد الحــل التالي :

$$\left(\frac{18}{23},\frac{5}{23}\right) \text{ لـــ } (A_1\,,A_3) \text{ و } \left(\frac{6}{23},\frac{17}{23}\right) \text{ لـــ } (B_3\,,B_4) \text{ و } \upsilon=\frac{168}{23}$$

(تحقق من ذلك) .

وبشكل عام ولاختصار مباراة فإننا نقوم أولاً بفحص استراتيجيات أحد اللاعبين وحذف تلك التي تخضع للهيمنة ومن ثم نقوم بفحص استراتيجيات اللاعب الثاني وحذف تلك التي تخضع للهيمنة حتى نصل إلى أقصى اختصار ممكن للمباراة المعنية . وفـــي هذا الصدد لدينا النظرية التالية :

نظرية (2 ــ 2)

إذا أمكن اختصار المباراة G إلى المباراة 'G فإن أي حل لـــ 'G هو حل لـــ G .

إن عكس نظرية (2 ــ 2) ليس صحيحاً بشكل عام فكل حل لـــ G ليس بالضـــرورة حل لـــ 'G . وهذا يعني أننا قد نخسر بعض الحلول المثلى الممكنة للمباراة الأصلية G عند استخدامنا للمباراة المختصرة 'G . فمثلاً لو أخذنا المباراة $G=\begin{bmatrix}2\,2\\0\,1\end{bmatrix}$ فإنه يمكن اختصارها إلى [2 2] ثم إلى $G'=[2]$ والتي تقود إلى الحل الأمثل $(A_1\,,B_1)$ وقيمته $\upsilon = 2$ للمباراة المختصرة والأصلية معــاً . ويمكننـــا فـــي الحقيقـــة أن نتأكـــد مـــن الاستراتيجيات المختلطة (1,0) و $(\alpha, 1\text{-}\alpha)$ حيث $0 \le \alpha \le 1$ هي جميعاً حلول مثلى لـــ G وأن قيمها جميعاً هي $\upsilon = 2$ أي أننا خسرنا بعض الحلول للمبـــاراة الأصـــلية . ومع ذلك إذا كانت الهيمنة مطلقة فإنه لن تكون هناك خسارة في الحلـــول (لاحـــظ أن الهيمنة في [2 2] ليست مطلقة) كما في المثال التالي :

مثال (2 ــ 4)

شركتان متنافستان A و B للسيطرة على تسويق الخدمات الهاتفيـــة فـــي أحـــد البلدان العوائد تقدر بملايين الدولارات . المطلوب إيجاد الحل الأمثل لكلا الشركتين .

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & B & \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -600 & 200 & 400 \\ 400 & -800 & 1000 \\ -800 & -1000 & 1400 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحـــــل :

نلاحظ أولاً عدم وجود نقطة سرجية وأن B_2 تهيمن مطلقاً على B_3 ولذا فـــإن المباراة تختصر إلى :

$$\begin{bmatrix} -600 & 200 \\ 400 & -800 \\ -800 & -1000 \end{bmatrix}$$

وفيها A_1 تهيمن مطلقاً على A_3 ولذا فإن الأخيرة تختصر إلى المبـــاراة 2 x 2 التالية :

$$\begin{bmatrix} -600 & 200 \\ 400 & -800 \end{bmatrix}$$

وحـــلها هـــو $(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$ لـــ (A_1 , A_2) و $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ لـــ (B_1 , B_2) وقيمــــتها $\upsilon = -200$ أي أن الشركة A ستخسر 200 مليون دولار بينما تربح الشركة B مقـــدار 200 مليون دولار . والحل الذي حصلنا عليه هو حل وحيـــد للمبـــاراة الأصـــلية لأن الهيمنة بين الاستراتيجيات مطلقة .

ملاحظة (2 ــ 2)

1 ــ في حال تعدد الحلول المثلى فإنها جميعاً تعطي نفس القيمة والتي نسميها قيمة المباراة وتنفيذ أحدها يكون كاف للاعبين إلا أنه قد يُفقد اللاعبين بعض المرونة التي قد يحتاجونها .

ب ــ إن مفهوم الهيمنة والهيمنة المطلقة الذي ذكرناه أعلاه بين الاستراتيجيات يتعلق فقط بالاستراتيجيات الخالصة (البحتـه) . إن استخدام مفهوم مماثل للاستراتيجيات المختلطة هو من الأمور الصعبة عملياً مع أنه صحيح من الناحية النظرية ولذا فلن نتطرق له في هذا الكتاب .

جـ ــ إن الطريقة المبسطة لحل المباريات 2×2 والواردة في الملاحظة (2ــ1) تنطبق فقط على المباريات 2×2 غير القابلة للاختصار .

(2 ــ 5) حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين من النوع $2 \times m$ (أو $n \times 2$) حيث $m \geq 3$ (أو $n \geq 3$) :

إذا كان لدينا مباراة ذات مجموع صفري لشخصين من الشكل $n \times m$ (وليست من النوع 2×2) وأمكن اختصارها إلى أحد الشكلين $2 \times m$ حيث $m \geq 3$ أو $n \times 2$ حيث $n \geq 3$ وإذا لم يكن للمباراة الناتجة (بعد الاختصار) نقطة سرجية فإنه يمكن حلها بإحدى الطرق التالية :

طريقة التجزئة :

إذا كانت المباراة الناتجة من الشكل $2 \times m$ ($m \geq 3$) فهذا يعني أن للاعب B أكثر من استراتيجيتين وعندها نقوم بإيجاد جميع المباريات الجزئية من الشكل 2×2 للاعب B (وعددها $\binom{m}{2}$)[1] ثم نقوم بحلها جميعاً ومن ثم اختيار المباراة التي تملك أقل قيمة (وذلك لأن جميع هذه المباريات الجزئية تعود إلى اللاعب B ولأن العوائد فيها تعبر عن خسائر لهذا اللاعب) ويكون حل هذه المباراة هو حل للمباراة الأصلية . أما إذا كانت المباراة الناتجة من الشكل $n \times 2$ ($n \geq 3$) فعندئذ نقوم بإيجاد جميع المباريات الجزئية من الشكل 2×2 للاعب A (وعددها $\binom{n}{2}$) ونحلها جميعاً ثم

نختار تلك التي تملك أكبر قيمة (لأن جميع هذه المباريات الجزئية تعـود للاعـب A ولأن العوائد فيها تعبر عن أربـاح لهذا اللاعب) ويكون حل هذه المباراة هـو حـل للمباراة الأصلية . ويعود السبب في ذلك إلى النظرية (2ـ2) أعلاه .

وسنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (2 ـ 5)

أوجد الحل الأمثل لكل من المباريات التالية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

حـــل

نلاحظ أولاً أنه لا توجد لأي من المباريتين G_1 ، G_2 نقطة سرجية وأن المباراة G_1 يمكن اختصارها إلى :

$$G_3 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(وذلك لأن B_6 تهيمن على B_5 و B_1 ولأن B_2 تهيمن على B_3) .

كذلك فإن G_2 يمكن اختصارها إلى :

$$G_4 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(وذلك لأن A_1 تهيمن على A_4 و A_5) .

الآن نلاحظ أن G_3 هي من النوع $2 \times m$ ($m = 3$) ويمكن تجزئتها إلـــى $\binom{3}{2} = 3$ مباريات جزئية هي :

$$a = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3/4 \\ 1/4 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3/4 & 1/4 \end{array} & \end{array}$$

$$c = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4/7 \\ 3/7 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3/7 & 4/7 \end{array} & \end{array}$$

جميعها تعود إلى اللاعب B وللحل نلاحظ :

(a) تملك نقطة سرجية هي (4) فحلها هو (A_1 , B_1) وقيمته $\upsilon_a = 4$.

(b) لا تملك نقطـــة ســـرجية وحـــلها هـــو $(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ لـــ (A_1 , A_2) و $(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ لـــ (B_2 , B_6) وقيمته $\upsilon_b = \frac{15}{4}$ (تحقق من ذلك) .

(c) لا تملك نقطـــة ســـرجية وحـــلها هـــو $(\frac{4}{7},\frac{3}{7})$ لـــ (A_1 , A_2) و $(\frac{3}{7},\frac{4}{7})$ لـــ (B_4 , B_6) وقيمته $\upsilon_c = \frac{30}{7}$.

وبملاحظة أن (b) تمتلك أقل قيمة فإن الحل الأمثل للمباراة الأصلية هو نفسه الحل الأمثل للمباراة الجزئية (b) .

حـــــل المباراة G_2

نذكر أولاً أن المباراة G_2 أمكن اختصارها إلى المباراة G_4 :

وهي من النوع n x 2 (n = 3) ويمكــن تجزئتها إلى $\binom{3}{2} = 3$ مباريات جزئية وهي :

$$d = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4/5 \\ 1/5 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 2/5 & 3/5 \end{array} & \end{array}$$

$$e = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4/11 \\ 7/11 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 6/11 & 5/11 \end{array} & \end{array}$$

جميعها تعود إلى اللاعب A . وحلول هذه المباريات هي كما يلي :

(d) لا تملك نقطــة ســـرجية وحـــلها هــــو $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ لــــ (A_2, A_3) و $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ لـــ (B_1 , B_2) وقيمته $\upsilon_d = 7/5$.

(e) تملك نقطــة ســـرجية هي (1) وحـــلها هــو (A_2 , B_2) وقيمته $\upsilon_e = 1$.

(f) لا تملك نقطــة ســـــرجية وحــــلها هــــو $(\frac{4}{11}, \frac{7}{11})$ لــــ (A_1 , A_3) و $(\frac{6}{11}, \frac{5}{11})$ لـــ (B_1 , B_2) وقيمته $\upsilon_f = \frac{9}{11}$.

وبملاحظة أن (d) تملك أكبر قيمة فإن الحل الأمثل للمباراة الأصلية هو نفســه الحل الأمثل للمباراة الجزئية (d) .

طريقة الرسم البياني

بعد اختصار المباراة نميز حالتين :

أ ــ المباريات من الشكل $2 \times m$ ($m \geq 3$) :

نرسم محورين عموديين مقابلين للاستراتيجيتين العائدتين لــ A ونضع على كل منهما عوائد الاستراتيجية المقابلة بحيث تكون الوحدات متساوية ومتقابلة تماماً نقوم بعدها بتوصيل العوائد المتقابلة لهاتين الاستراجيتين ثم نعلم القسم السفلي من الخطوط الناتجة ثم نختار أعلى نقطة من القسم المعلم ثم نحدد الخطين (وبالتالي الاستراتيجيتين) المتقاطعين في هذه النقطة ونحل المباراة 2×2 الجزئية المقابلة فيكون حلها هو حل للمباراة الأصلية .

ب ــ المباراة من الشكل $n \times 2$ ($n \geq 3$) :

نرسم محور عمودين مقابلين لاستراتيجيات اللاعب B ونضع على كل منهما عوائد الاستراتيجية المقابلة بحيث تكون الوحدات متساوية ومتقابلة ثم نصل بين العوائد المتقابلة لهاتين الاستراتيجيتين بخطوط ثم نعلّم القسم العلوي ثم نختار أدنى نقطة من القسم المعلم ثم نحدد الخطين (وبالتالي الاستراتيجيتين) المتقاطعين في تلك النقطة وتحل المباراة 2×2 المقابلة فيكون حلها هو حل المباراة الأصلية .

وسنوضح الطريقة البيانية في الحالتين أ ــ و ب ــ من خلال إعادة حل المثال (2 ــ 5) بالطريقة البيانية .

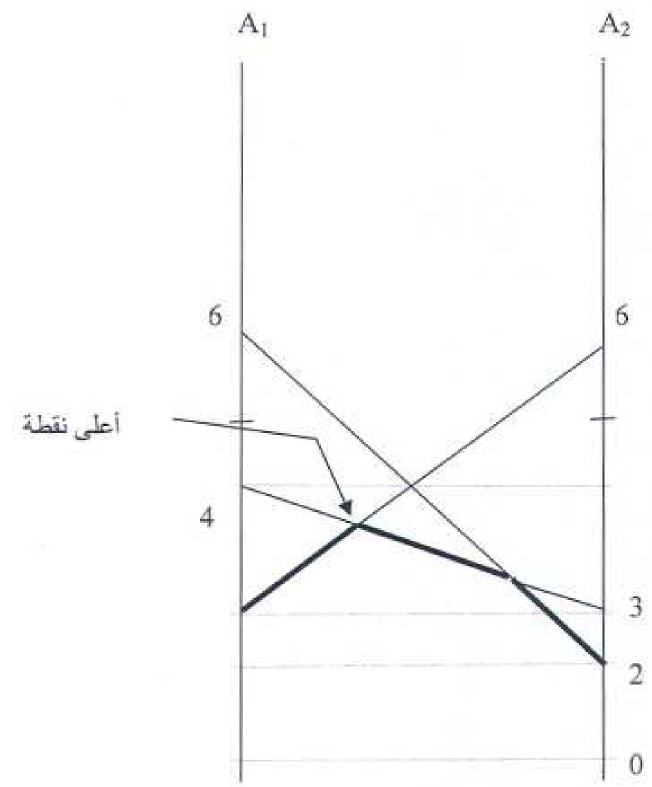
مثال (2 ــ 6)

أوجد الحل الأمثل للمباريات G_1 ، G_2 في مثال (2 ــ 5) بالطريقة البيانية .
بالعودة إلى مثال (2 ــ 5) فقد وجدنا أن المباراة G_1 أمكن اختصارها إلى المباراة :

$$G_3 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

ولو قمنا بالعمل الموصوف في (أ) أعلاه لحصلنا على الشكل (2 ــ 1) وأعلى نقطة في القسم السفلي المعلم تحدد لنا الاستراتيجية 2 x 2 الجزئية التالية :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$



شكل (2 ــ 1)

وهي المباراة الجزئية (b) والتي سبق وأوجدنا حلها أعلاه . وحلها يمثل الحل الأمثــل للمباراة الأصلية .

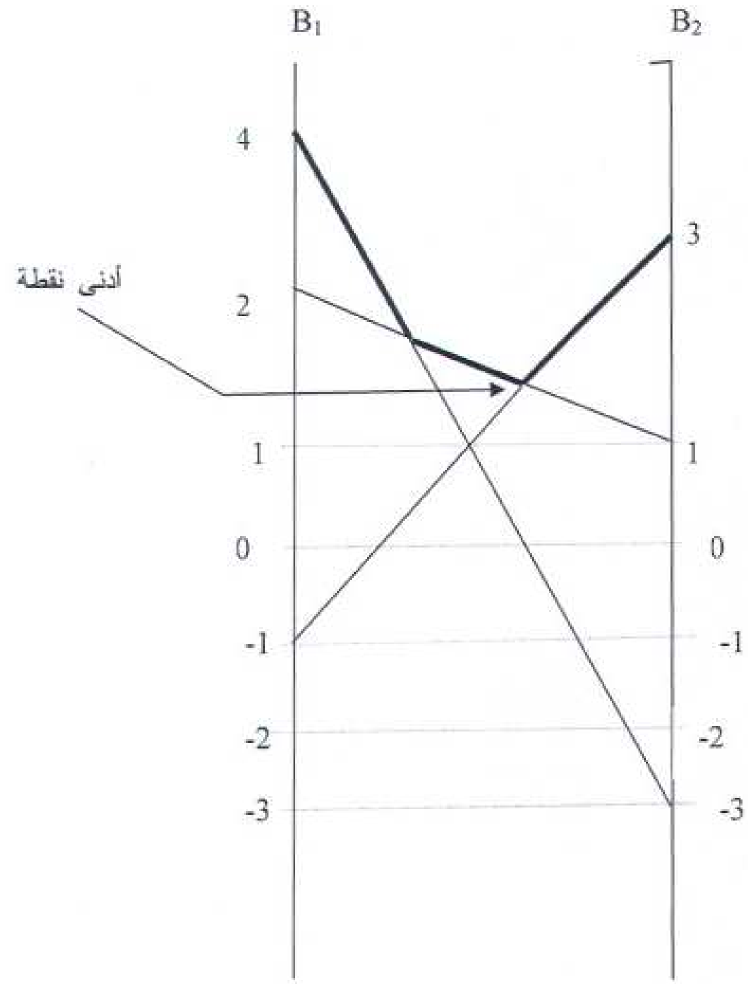
كذلك فقد وجدنا أن المباراة G_2 قد أمكن اختصارها إلى :

$$G_4 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ولو قمنا بالعمل الموصوف في (ب) أعـــلاه لحصلنا على الشكل (2 ــ 2) وأدنـــى نقطة في القسم المعلم تحدد لنا المباراة 2 x 2 الجزئية التالية :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

وهي المباراة الجزئية (d) والتي سبق وأوجدنا حلها . لاحظ أن نتائج المثال (2 ــ 5) تتطابق مع نتائج المثال (2 ــ 6) .



شكل (2 ــ 2)